M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Linjär Algebra, Föreläsning 5

Staffan Lundberg / Ove Edlund

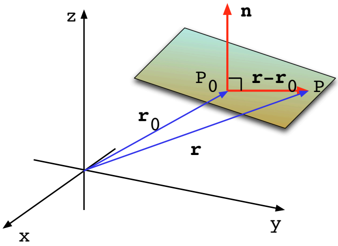
Luleå Tekniska Universitet

Bestäm ekvationen för linjen L genom punkterna $(5, 3)$ och $(-2, 7)$ på vektor- riktningskoefficient- och normalform.

Planets ekvation

Ett plan bestäms (entydigt) av en punkt P_0 (med ortsvektor $\mathbf{r}_0$) och en normalvektor $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$.

En punkt P (med ortsvektor $\mathbf{r}$) ligger på planet om och endast om vektorn $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n}$.

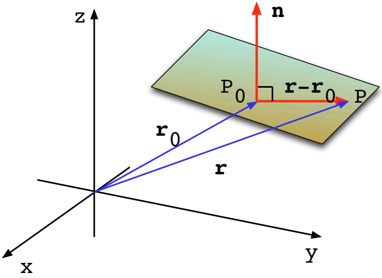


Planets ekvation på vektorform

Detta uttrycks med

$$\overline{P_0P} \bullet \mathbf{n} = 0 \quad \text{eller}$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \bullet \mathbf{n} = 0, \quad \text{där } \overline{P_0P} \text{ ligger i planet.} \tag{1}$$



Parameterfri form

Om $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ och $\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, kan (1) alternativt skrivas:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Detta kan skrivas mer förenklat:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

där $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

(2) uttrycker planets ekvation på parameterfri form.

Viktig anmärkning

- Observera att (2) är ekvationen för ett plan.
- I $\mathbb{R}^2$ kan räta linjer skrivas dels på parameter-/vektorform, dels på parameterfri form ($Ax + By + C = 0$).
- I $\mathbb{R}^3$ skrivs räta linjer enbart på parameter-/vektorform.

Alternativ formulering av planets ekvation

Ett plan i rummet bestäms med följande alternativa formulering:

Anta att vi känner en punkt $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ i planet och två icke-parallella vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som bägge är parallella med planet.

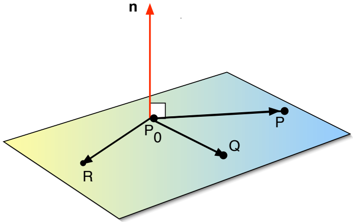
Punkten $P : (x, y, z)$ ligger i planet om vektorn $\overline{P_0P}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$:

$$\overline{P_0P} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

Vi får då planets ekvation på parameterform. Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ kallas planets riktningsvektorer.

Exempel

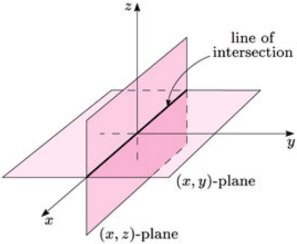
Genom punkterna $P_0 : (-1,2,1)$, $R : (0,6,3)$ och $Q : (1,1,4)$ går ett plan. Bestäm dess ekvation, dels på parameterform, dels på parameterfri form.

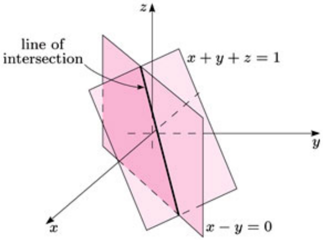


Svar: $14x + y - 9z + 21 = 0$, $(x,y,z) = (-1,2,1) + s(1,4,2) + t(2,-1,3)$

Exempel

Bestäm skärningslinjen mellan planen $x + y + z = 1$ och $x - y = 0$.





Lösningsförslag

- Skärningslinjen ligger i bägge planen, eller hur?
- Linjens riktningsvektor $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot bägge normalvektorerna.
- $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, vilket studenten ombeds kontrollera.
- Välj punkt P_0 på linjen godtyckligt.
- Fixera en koordinat, tex $x = 0$, och lös de övriga ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} y + z &= 1 \\ -y &= 0 \end{cases}$$

- $P_0 : (0, 0, 1)$.
- Linjens ekvation $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{v}$, vilket ger

$$L : \begin{cases} x &= t \\ y &= t \\ z &= 1 - 2t \end{cases} \quad \text{där } t \in \mathbb{R}.$$

Avslutande exempel

Bestäm ekvationen för det plan Π som innehåller punkterna $(0, -3, 1)$ och $(1, -1, 1)$ och som är parallellt med vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Lös på egen hand

- Låt Π vara planet $x + 2y + az - 3 = 0$, där a är en konstant. Ange a så att linjen

$$L : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \text{ligger i } \Pi.$$

Svar: $a = 1/2$.