M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Linjär Algebra, Föreläsning 6

Staffan Lundberg / Ove Edlund

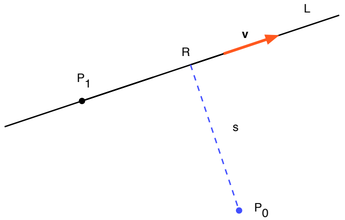
Luleå Tekniska Universitet

- Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $P_0 : (1, 2, -1)$ och som är parallellt med vektorerna $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Svar: $z - 3y + 8x - 1 = 0$

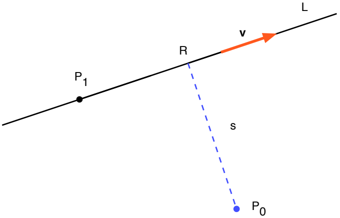
Avståndsberäkningar: Punkt-linje

Bestäm avståndet s mellan punkten $P_0 : (x_0, y_0)$ och linjen $L : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\,\mathbf{v}$.



Metodik

- Normera $\mathbf{v}$. $\mathbf{v}_e = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.
- Bestäm annan punkt $P_1 : (x_1, y_1)$ godtyckligt på L. Exempelvis ger $t = 0$ punkten P_1 med ortsvektor $\mathbf{r}_1$.
- Teckna $\overline{P_1P_0}$.

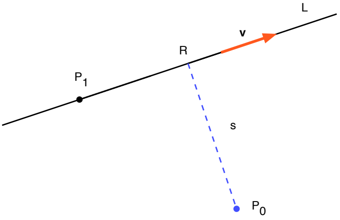


- $\overline{P_1R}$ är $\overline{P_1P_0}$:s komposant parallell med L. Projektionssatsen:

$$|\overline{P_1R}| = |\overline{P_1P_0} \bullet \mathbf{v}_e|.$$

- Sökta avståndet med Pytagoras sats:

$$s = \sqrt{|\overline{P_1P_0}|^2 - |\overline{P_1R}|^2}.$$



Alternativ

Alt. 1 Avståndet kan beräknas enligt

$$s = |\overline{P_1P_0} \times \mathbf{v}_e| = \left|\overline{P_1P_0} \times \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|$$

Alt. 2 För linjer i $\mathbb{R}^2$, med linjens ekvation på formen $Ax + By + C = 0$, kan avståndet beräknas enligt

$$s = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Övning Försök att härleda resultatet i Alt. 1 och 2.

Exempel

Bestäm avståndet s mellan punkten $P_0 : (2, 0, -3)$ och linjen

$$L : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Lösningsförslag

- Bestäm annan punkt P_1 godtyckligt på L. Exempelvis ger $t = 0$ punkten $P_1 : (1, 1, -3)$.
- Teckna $\overline{P_1P_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- Normera linjens riktningsvektor.

$$\mathbf{v}_e = \frac{1}{\sqrt{25}} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- $\overline{P_1R}$ är $\overline{P_1P_0}$:s komposant parallell med L.

$$\overline{P_1R} = (\overline{P_1P_0} \bullet \mathbf{v}_e)\,\mathbf{v}_e.$$

- Projektionssatsen:

$$|\overline{P_1R}| = \left|\overline{P_1P_0} \bullet \mathbf{v}_e\right| = \frac{3}{5}.$$

Sökta avståndet:

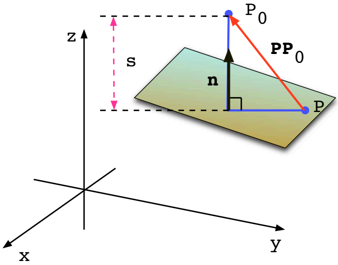
$$s = \sqrt{|\overline{P_1P_0}|^2 - |\overline{P_1R}|^2} = \sqrt{2 - 9/25} = \frac{\sqrt{41}}{5}.$$

Alternativ metod

$$
\begin{aligned}
s &= |\overline{P_1P_0} \times \mathbf{v}_e| = |\overline{P_1P_0}| \, \sin\theta = \quad (\theta \text{ vinkel mellan vektorerna}) \\
&= 1/5 \left| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right| = \ldots \quad (\text{Övning!}) \\
&= 1/5 \left| \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right| = \frac{\sqrt{41}}{5}.
\end{aligned}
$$

Avståndsberäkningar: Punkt-plan

Bestäm avståndet s mellan punkten $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ och planet Π : $Ax + By + Cz + D = 0$.

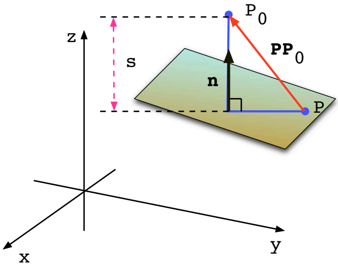


Metodik

- Planets normalvektor $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$.
- Vi normerar $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n}_e = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}.$$

Välj punkten P godtyckligt i planet $Ax + By + Cz + D = 0$. Ett användbart sätt är att låsa två av tre koordinater t.ex. $P : (0, 0, -D/C)$.

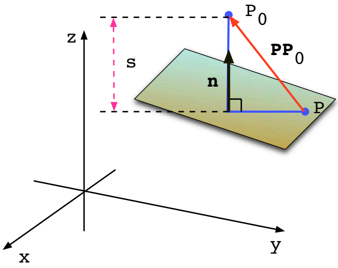


Vi tecknar vektorn

$$\overline{PP_0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 + D/C \end{bmatrix} .$$

Det sökta avståndet är enligt projektionssatsen

$$s = |\overline{PP_0} \bullet \mathbf{n}_e|$$

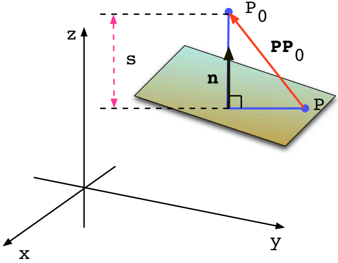


$$s = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \left| \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 + D/C \end{bmatrix} \right|$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad .$$

Exempel

Bestäm avståndet s mellan punkten $P_0 \ : \ (-1, 3, -2)$ och planet $\Pi : 2x - 3y + z - 1 = 0$.



Lösningsförslag

- Planets normalvektor $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Vi normerar $\mathbf{n}$:
$$\mathbf{n}_e = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
- Välj punkten P godtyckligt i planet, t.ex. $P : (0, 0, 1)$. Vi tecknar vektorn $\overline{PP_0} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

- Det sökta avståndet är enligt projektionssatsen

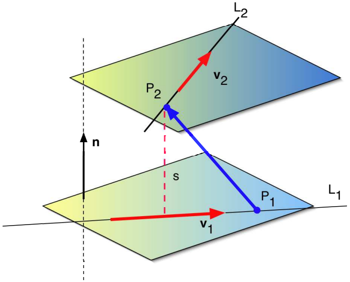
$$s = |\overline{PP_0} \bullet \mathbf{n}_e|,$$

vilket ger:

$$s = \frac{1}{\sqrt{14}} \left| \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{14}.$$

Avståndsberäkningar: Linje-linje

Bestäm avståndet s mellan linjerna L_1, som går genom punkten P_1 med riktningsvektor $\mathbf{v}_1$ respektive L_2, som går genom punkten P_2 med riktningsvektor $\mathbf{v}_2$.



Metodik

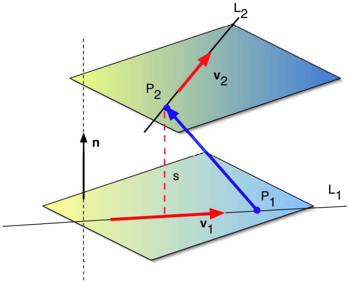
- Linjernas ekvationer:

$$L_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\,\mathbf{v}_1$$

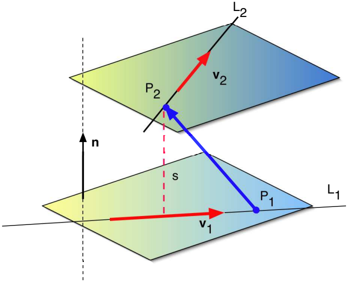
resp.

$$L_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\,\mathbf{v}_2 .$$

- Bestäm godtyckliga punkter på L_1 resp. L_2. Exempelvis ger $t = 0$ punkterna P_1 resp. P_2.



- Teckna $\overline{P_1P_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.
- s är längden av $\overline{P_1P_2}$:s komposant längs den gemensamma enhetsnormalvektorn till linjerna, $s = |\overline{P_1P_2} \cdot \mathbf{v}_e|$.
- Normalens enhetsriktningsvektor $\mathbf{v}_e = \dfrac{\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}}{|\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}|}$.



Sökta avståndet: $s = |\mathbf{v}_e \bullet \overline{P_1P_2}|$.

Avslutande exempel

Bestäm avståndet s mellan linjerna L_1, som går genom punkterna $P : (1, -2, -1)$ och $Q : (0, -2, 1)$ respektive L_2, som går genom punkterna $R : (-1, 2, 0)$ och $S : (-1, 0, -2)$.

Lösningsförslag

- Linjernas ekvationer:

$$L_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

resp.

$$L_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad .$$

- Bestäm godtyckliga punkter P_1 på L_1 resp. P_2 på L_2. Exempelvis $P_1 = P = (1, -2, -1)$ resp. $P_2 = R = (-1, 2, 0)$.
- Teckna $\overline{P_1P_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- s är längden av $\overline{P_1P_2}$:s komposant längs den gemensamma enhetsnormalvektorn till linjerna,

$$s = |\overline{P_1P_2} \bullet \mathbf{v}_e| \quad .$$

- Normalens enhetsriktningsvektor

$$\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}}{|\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}|} =$$

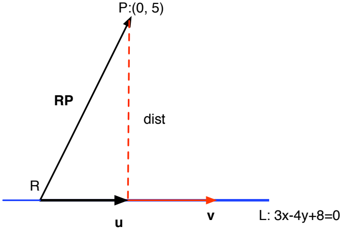
$$= \ldots = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad .$$

- Sökta avståndet:

$$s = \frac{1}{\sqrt{24}} \left| \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right| = \frac{7}{\sqrt{6}} \quad .$$

Avst pkt-linje i $\mathbb{R}^2$ – räkna själv

Beräkna avståndet (dist) från punkten $P : (0, 5)$ till räta linjen $L : 3x - 4y + 8 = 0$.



Svar: $a = 12/5$.

Anm Problemet kan lösas mer eller mindre enkelt. Välj helst den enkla varianten …