M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Linjär Algebra, Föreläsning 7

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Uppgift 1

Två givna vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har längderna 4 resp. 2. En tredje vektor $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}$, antar längden 13 för två olika t-värden. Det ena är $\frac{7}{2}$.

(a) Bestäm det andra.

(b) Bestäm vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Egenskaper hos skalärprodukten

- $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$
- $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 = |\mathbf{u}|^2$
- $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta$, där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.
- Skalärprodukten beräknas enligt

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

- Längden (normen) beräknas enligt

$$\left\| \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Uppgift 2

Betrakta följande två linjer i $\mathbb{R}^3$:

$$L_1 : \begin{cases} x &= -3t + 4 \\ y &= 6t - 4 \\ z &= -6t + 9 \end{cases} \quad \text{resp.} \quad L_2 : \begin{cases} x &= -2s - 3 \\ y &= 4s + 10 \\ z &= -6s - 9 \end{cases}$$

för alla $s, t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestäm skärningspunkten mellan L_1 och L_2.

(b) Bestäm ekvationen för planet som innehåller både L_1 och L_2.

Uppgift 2, forts

(c) Betrakta ytterligare en linje

$$L_3 : \begin{cases} x &= 2r + a \\ y &= -2r + 5 \\ z &= 3 \end{cases}$$

för alla $r \in \mathbb{R}$. Bestäm värdet på a så att L_3 skär L_1 och L_2 i samma punkt. Beräkna dessutom vinkeln mellan L_1 och L_3.

Vektorprodukt och planets ekvation

- Vektorprodukten $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ har egenskaperna
  - $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta$ där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.
  - $\mathbf{w}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.
  - $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ bildar en högerorienterad vektor-trippel.
- Vektorprodukten beräknas enligt

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

- Planets ekvation bildas av

$$A(x - x_0) + B(y - x_0) + C(z - z_0) = 0$$

  där A, B, C är elementen i en normalvektor till planet, och (x_0, y_0, z_0) är en punkt i planet.
- Planets ekvation

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Uppgift 3

Ett plan går genom punkterna $(3, 0, 1)$, $(4, 1, 0)$ och $(1, 4, -1)$.

(a) Bestäm en ekvation för planet.

(b) Beräkna avståndet från punkten $Q = (-1, 4, 2)$ till planet. Exakt svar, ej närmevärde.

Ortogonal projektion, och längd av projektionen

Ortogonal projektion av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$

- $\mathbf{u_v} = \dfrac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}\mathbf{v}$
- $\|\mathbf{u_v}\| = \dfrac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|}$

Med normerad $\mathbf{v_e} = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$

- $\mathbf{u_v} = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v_e})\mathbf{v_e}$
- $\|\mathbf{u_v}\| = |\mathbf{u} \bullet \mathbf{v_e}|$

Uppgift 4

(a) Bestäm den punkt Q på linjen

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som ligger närmast origo.

(b) Beräkna avståndet mellan origo och linjen L. Exakt svar, ej närmevärde.

(c) Punkterna $P_1 : (0, 3, 0)$ och Q ligger som bekant på L. Beräkna arean av triangeln med hörn i origo, Q och P_1. Exakt svar, ej närmevärde.

Areatolkning av vektorprodukten

Arean av parallellogrammet som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ges av $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$

Uppgift 5

Betrakta linjen

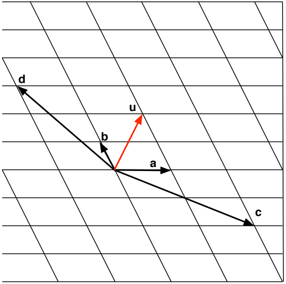
$$L : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 1+t/2 \\ z &= 1-t/2 \end{cases}$$

(a) Visa att L är parallell med planet $2x+y+5z=3$.

(b) Beräkna linjens avstånd till planet. Exakt svar, ej närmevärde.

Uppgift 6

Låt $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ vara en bas för vektorerna i planet. Antag att vektorn $\mathbf{u}$ har koordinaterna $(1, 2)$ i denna bas. Antag vidare att $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$ är två vektorer med koordinaterna $(2, -2)$ respektive $(-1, 3)$ i basen $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Se figur.



Eftersom $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$ inte är parallella kan vi välja $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ som en annan bas för vektorerna i planet. Vad har vektorn $\mathbf{u}$ för koordinater i basen $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$?