M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Linjär Algebra, Föreläsning 8

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Matriser

En $m \times n$- matris är ett rektangulärt talschema

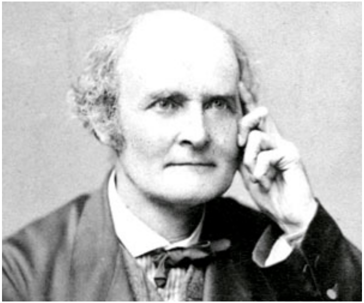
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

med m rader och n kolonner.

De reella (eller komplexa) talen a_{mn}, där m resp. n utgör rad- resp. kolonnindex, kallas matrisens element.

Brittiska upptäckter

Begreppet matris skapades av den brittiske matematikprofessorn J.J. Sylvester ca 1850. En annan brittisk matematiker, Cambridge-professorn A. Cayley (bilden till höger), utvecklade i sin uppsats ”Memoire on the theory of matrices” (publ ca 1860) grunderna i matristeorin.



Anmärkning Vi kommer hädanefter att använda dessa alternativa matrisbeteckningar (efter britten C.E. Cullis, 1913):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ alternativt } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Alternativ notation

Matrisen

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

kan ibland utryckas

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix},$$

om man i något sammanhang vill lyfta fram matrisens kolonner.

Anmärkning

Vektorn $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, skall vi uppfatta som en kolonnmatris (av ordning $n \times 1$).

En matris av typ $1 \times n$ kallas en radmatris.

Terminologi

I en nollmatris är samtliga element noll.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Huvuddiagonal

I matrisen $\mathsf{A} = \left[\, a_{ij} \,\right]$ formar elementen a_{jj} matrisens huvuddiagonal.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kvadratisk matris

En matris är kvadratisk om antalet kolonner och antalet rader överensstämmer.

En kvadratisk matris D kallas en diagonalmatris om samtliga icke-diagonala element är noll.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Triangulär matris

En kvadratisk matris L är undertriangulär om samtliga element över huvuddiagonalen är noll.

En kvadratisk matris U är övertriangulär om samtliga element under huvuddiagonalen är noll. Se nedanstående exempel.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Enhetsmatris

En kvadratisk matris I med ettor i huvuddiagonalen och nollor för övrigt, kallas enhetsmatris.

$$\mathsf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Att räkna med matriser

Hittills har vi använt matriser som ett sätt att förenkla hanteringen av linjära ekvationssystem.

Det finns emellertid skäl i att definiera räkneregler för att kunna ”räkna med matriser”, på liknande sätt som vi nyttjar räkneregler när vi hanterar exempelvis reella tal.

Två matriser är lika om

- de är av samma typ,
- elementen i motsvarande positioner är lika.

Operationer

För matriser skall vi definiera tre räkneoperationer:

- Addition,
- Multiplikation med reellt tal,
- Matrismultiplikation.

Läroboken sammanfattar i avsnitt 2.1, Proposition 2.11 resp. Proposition 2.16, de räkneregler som gäller för ovanstående operationer.

Exempel

Antag att

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ resp. } \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Beräkna

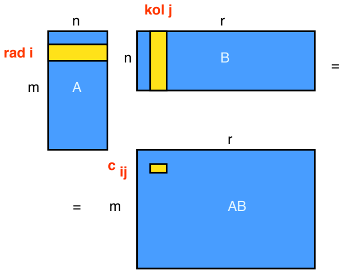
$$2\mathsf{A} - 3\mathsf{B}.$$

Notera att matriserna A resp. B är av samma typ, i detta fall 2×3.

Matrismultiplikation

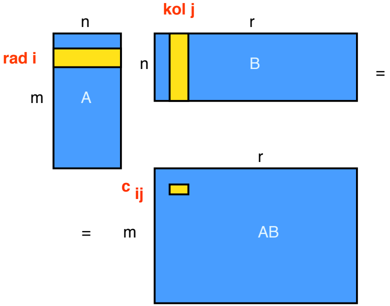
Produkten C $=$ AB är meningsfull endast om A är av typ $m \times n$ och B är a typ $n \times r$.

Elementet c_{ij}, i produkten, är skalärprodukten av rad i ur A med kolonn j ur B, enligt vidstående figur.



Exempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}.$$



Exempel

- Beräkna AB och BA om

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Beräkna AB och AC om

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Anmärkning

Ovanliga egenskaper hos matrisprodukt:

- $AB \neq BA$. (i allmänhet)
- $AB = 0$ medför inte att $A = 0$ eller att $B = 0$.
- $AB = AC$ medför inte att $B = C$.

Avslutande exempel

1

- Teckna 2×2-matriserna A och B sådana att

$$a_{ij} = i + j, \quad \text{och} \quad b_{ij} = (-1)^{i+j}.$$

- Beräkna AB, 2A $-$ B och BA.

Svar: $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $2A - B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$