M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Linjär Algebra, Föreläsning 9

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Låt A vara en 2×2-matris sådan att

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Beräkna

- A^2

Transponat

Med transponatet A^T till $m \times n$-matrisen A menas den $n \times m$-matris vars kolonn j utgörs av rad j i A, dvs.

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

Exempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Regler

Räkneregler för matristransponat:

$$(\mathsf{A}^T)^T = \mathsf{A}$$

$$(\mathsf{A}+\mathsf{B})^T = \mathsf{A}^T + \mathsf{B}^T$$

$$(\lambda \mathsf{A})^T = \lambda \mathsf{A}^T$$

OBS! Ordningen $(\mathsf{AB})^T = \mathsf{B}^T\mathsf{A}^T$

Om $\mathsf{A}^T = \mathsf{A}$ är matrisen symmetrisk och kvadratisk.

Se även Avsn. 2.1, Proposition 2.21 i läroboken.

Exempel

Låt

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ resp. } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad .$$

Beräkna om möjligt

- $(\mathsf{A}\mathbf{x})^T$,
- $\mathbf{x}^T\mathsf{A}^T$,
- $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$,
- $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$,
- $\mathsf{A}^T\mathbf{x}^T$.

Kvadratiska matriser och deras inverser

Dagens lektion handlar uteslutande om kvadratiska matriser, dvs matriser med lika många rader som kolonner.

En $n \times n$-matris A är inverterbar om det existerar en $n \times n$-matris A^{-1} med

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I} \quad .$$

Matriser/Inversa matriser är intimt förknippade med s.k. linjära avbildningar (en sorts ”funktioner”, släkt på långt håll med $y = f(x)$.)

Egenskaper hos inversen

- $(\mathsf{AB})^{-1} = \mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1}$,
- $(\mathsf{A}^{-1})^{-1} = \mathsf{A}$,
- $(\mathsf{A}^{T})^{-1} = (\mathsf{A}^{-1})^{T}$.

Symmetriska matriser

Symmetriska matriser utgör en viktig medlem i matrisfamiljen. Som nämnts tidigare gäller relationen

$$\mathsf{A}^T = \mathsf{A}$$

för symmetriska matriser.

Antag att A är symmetrisk. Om A^{-1} existerar så är inversen också symmetrisk.

$$(\mathsf{A}^{-1})^T = (\mathsf{A}^T)^{-1} = (\text{symmetrisk matris}) = \mathsf{A}^{-1}$$

Intressant egenskap

Om vi multiplicerar en godtycklig matris A med dess transponat A^T blir produkten symmetrisk.

Exempel

$$\mathsf{AA}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 6 \\ 10 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Att fundera på:

- Är matrisprodukten $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$ symmetrisk?
- Visa att $(\mathsf{AA}^T)^T = \mathsf{AA}^T$

Matrisekvationer

En viktig tillämpning på matriskalkyl i allmänhet och matrisinvers i synnerhet finner vi i de s.k. matrisekvationerna. Vi berör detta moment under Föreläsning 12.

Avslutande exempel

Antag att

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ resp. } \mathsf{C} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Beräkna AC^T.

Lösningsförslag

$$\mathsf{AC}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)\mathsf{I}.$$

Det gäller uppenbarligen att

$$\mathsf{A}\overbrace{\left(\frac{\mathsf{C}^T}{ad-bc}\right)}^{=\mathsf{A}^{-1}}=\mathsf{I}.$$

Anmärkning Talet $ad - bc$ kallas determinanten till 2×2 - matrisen A. En kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om matrisens determinant är skild från noll.

Exempel

Lös ekvationssystemet

$$\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

där

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Egen övning

Använd denna tankegång för att invertera matrisen

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Överkurs: Hermiteska matriser

En Hermitesk matris är den komplexa motsvarigheten till en reell symmetrisk matris.

En matris A säges vara hermitesk om $A^H = A$, där A^H betecknar den matris som fås av att ersätta alla element i A^T med sina komplexa konjugat.

Exempel

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}, \ \mathsf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 1 \end{bmatrix}, \ \mathsf{A}^H = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi konstaterar: $\mathsf{A} = \mathsf{A}^H$, dvs A är hermitesk.

Pauli-matriser

Exempel I kvantfysiken studerar man de s.k. Pauli-matriserna. En av Pauli-matriserna är $\mathsf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$. Visa att P_2 är hermitesk.