M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Linjär Algebra, Föreläsning 10

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Linjär Algebra, Föreläsning 9

1. Bestäm A^{-1} till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

är inverterbar. Avgör vilken av de följande matriserna som är A^{-1}:

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 11 \\ -1 & 0 & 4 \\ 9 & 4 & -14 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \\ 9 & 4 & -16 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & 4 \\ 10 & 6 & -16 \end{bmatrix}$$

Determinanter

Begreppet determinant, som är äldre än matrisbegreppet, har använts sedan 1600-talet, då Leibniz löste linjära ekvationssystem med determinanter. Först på 1800-talet fick determinanten sitt nuvarande utseende.

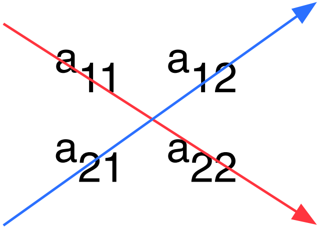
Till varje kvadratisk matris A ordnas ett tal, som kallas determinanten. Vi inleder med att betrakta 2×2-matrisen

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad .$$

2×2-matris

Determinanten för 2×2-matrisen A, med beteckning $\det$ A eller $|$A$|$, är det tal som definieras enligt

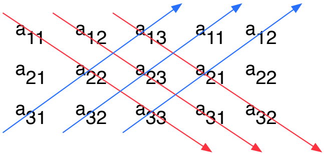
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



3×3-matris

Om A är en 3×3-matris , definieras $\det$ A som

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$



Sarrus regel

$$
\begin{aligned}
&a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\
&- \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33}\right).
\end{aligned}
$$

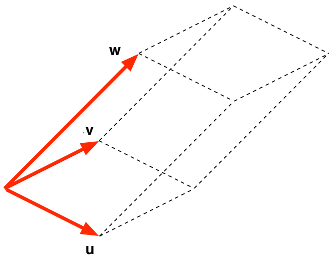
$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}
$$

Geometrisk tolkning

För parallellepipeden ("lådan") med kantvektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ tolkas determinanten geometriskt som volymen med tecken av parallellepipeden.

Vi uttrycker detta alternativt med trippelprodukten

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$



Två viktiga tillämpningar

Determinantkalkylen har många tillämpningar. Här nämner vi de kanske viktigaste:

1. Determinanter och inverterbarhet Om $\det A \neq 0$, så har matrisen invers.
   Vi nämnde denna egenskap under föregående lektion.
2. Determinanter och egenvärden Ett viktigt problem är att hitta de *egenvärden* λ för vilka $A - \lambda I$ är singulär.

   Detta avgörs med ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi återkommer om detta längre fram.

Räkneregler

Vi skriver 3×3-matrisen A som en radmatris:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

Med detta skrivsätt presenterar vi några räkneregler för determinanter (tillhörande exempel är uteslutande determinanter av ordn. 2):

Linearitetsegenskap hos determinanten–mult. av kolonn med $t \neq 0$

$$\det \begin{pmatrix} t\,\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} = t \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}, \quad t \text{ reellt tal,}$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 15 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \cdot 2 & 4 \\ 5 \cdot 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad .$$

Linearitetsegenskap hos determinanten–uppdelning längs kolonn

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a} + \mathbf{d} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} =$$
$$= \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 7+3 & 4 \\ 9+6 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 9 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} \quad .$$

2 kolonner lika

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{c}\end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Kolonnbyte

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{a} & \mathbf{c}\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}4 & 2\\ -7 & 3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -7\end{vmatrix} \quad .$$

En kolonn=0

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Enhetsmatrisen

$$\det \mathsf{I} = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad .$$

Viktigt hjälpmedel

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}+t\,\mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}4 & 2\\ -7 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4+(-2)\cdot 2 & 2\\ -7+(-2)\cdot 3 & 3\end{vmatrix} \quad .$$

Samma räkneregler för kolonn som för rad

$$\det \mathsf{A}^T = \det \mathsf{A}.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad .$$

Multiplikationssatsen

$$\det \mathsf{AB} = \det \mathsf{A} \det \mathsf{B}.$$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \mathsf{AB} = \ldots = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \quad .$$

Konsekvens

Om A är inverterbar med invers A^{-1}, gäller

$$1 = \det I = \det AA^{-1} = \det A \det A^{-1},$$

dvs.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad .$$

Exempel

- Betrakta den triangulära matrisen

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

  Beräkna $|\mathsf{A}|$. Slutsatser?

- Visa utan att beräkna determinanten att

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

Exempel

Använd räkneregler för att beräkna

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

I enlighet med tidigare exempel ska vi försöka överföra determinanten på trappform. Då blir determinanten synnerligen enkel att bestämma.

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$
= (-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-7) = -14.
$$

Determinanter av högre ordning

För determinanter av ordning 4 och högre fungerar inte Sarrus regel. Vi måste använda andra metoder.

För en godtycklig $n \times n$-matris A, definieras *submatrisen* A_{ij} som den $(n-1)\times(n-1)$-matris som man får genom att stryka rad i och kolonn j i A.

Determinanten $\det \mathsf{A}_{ij}$ kallas *subdeterminanten* till A och betecknas D_{ij}. *Kofaktorn* eller det *algebraiska komplementet* C_{ij} till A definieras som $(-1)^{i+j}$ multiplicerat med underdeterminanten D_{ij}.

Exempel

Låt

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Bestäm kofaktorerna C_{12} och C_{22}.

Lösningsförslag

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6 \quad ,$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12 \quad .$$

Laplace-utveckling

Antag att A $= (a_{ij})$ är en $n \times n$-matris. Determinanten till A kan beräknas genom att utveckla efter rad i eller kolonn j.

$$\begin{aligned} |\mathsf{A}| &= a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot C_{in} \\ &= a_{1j} \cdot C_{1j} + a_{2j} \cdot C_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot C_{nj} \quad . \end{aligned}$$

Exempel

Vi beräknar determinanten

$$|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

genom att exempelvis utveckla efter rad 1:

$$|\mathsf{A}| = 1 \cdot (+1) \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + \\ + 3 \cdot (+1) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0 \quad .$$

Vi prövar att utveckla efter kolonn 2:

$$|\mathsf{A}| = 2\cdot(-1)\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix} + 5\cdot(+1)\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{vmatrix} +$$
$$+\,8\cdot(-1)\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix} = 12 - 60 + 48 = 0 \quad .$$

Anmärkning

En god ide är att ordna många nollor i någon rad eller kolonn och därefter Laplace-utveckla:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \text{(utv. efter } \underline{k3}\text{)} = 0 \cdot (+1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (+1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 16 \quad .$$

Avslutande exempel

- Beräkna

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$