M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Linjär Algebra, Föreläsning 11

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

- Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna $P_0 : (1, 2, -1)$, $P_1 : (3, 2, 1)$, $P_2 : (-2, 0, 4)$. Använd determinantkalkyl.
- Visa, utan att använda Sarrus, identiteten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

- Visa att

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -68.$$

Linjära ekvationssystem

Linjära ekvationssystem är en av den linjära algebrans hörnstenar.

Exempel Systemet

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases} \tag{1}$$

är ett linjärt ekvationssystem.

Definition

Ett linjärt ekvationssystem med n variabler (obekanta) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är en mängd av m linjära ekvationer på formen:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

Talen $\{a_{ij}\}$ är systemets koefficienter och talen $b_i, i = 1 \ldots m$ systemets högerled. Ekvationssystemet kallas homogent, om alla $b_i = 0$, annars inhomogent.

Lösbarhet

En lösning till ovanstående system är en uppsättning tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ så att samtliga m ekvationer i systemet är uppfyllda.

Om ett system har lösningar(precis en eller oändligt många), är det lösbart, annars är systemet olösbart.

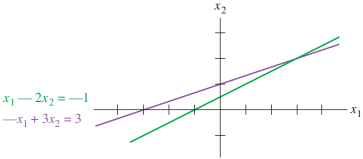
Notera att $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$ kallas den triviala lösningen, jfr. icke- triviala lösningar.

Geometrisk tolkning

Betrakta ekvationssystemet

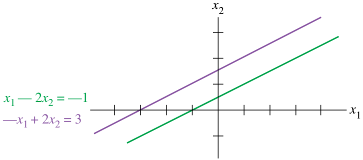
$$\begin{cases} x- & 2y = & -1 \\ -x+ & 3y = & 3 \end{cases} \qquad (3)$$

Vi tolkar systemet (3) som ekvationen för två räta linjer. Lösningen till (3) motsvaras av skärningspunkten mellan de två linjerna.



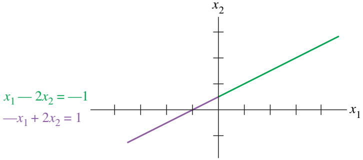
Vi vet att två linjer i planet inte behöver skära varandra – de kan vara parallella eller helt sammanfalla. Betrakta systemen

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x- & 2y = & -1 \\ -x+ & 2y = & 3 \end{array} \right. \tag{4}$$



respektive

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x- & 2y = & -1 \\ -x+ & 2y = & 1 \end{array} \right. \tag{5}$$



Sammanfattning

Systemet (4) har ingen lösning (parallella linjer), medan (5) har oändligt många lösningar (sammanfallande linjer). Vi sammanfattar:

Ett linjärt ekvationssystem har antingen

- precis en lösning, eller
- ingen lösning, eller
- oändligt många lösningar.

Gausselimination

Ekvationssystemet (2) kan skrivas på mer kompakt form, genom att man betraktar koefficienterna och högerledet i ett rektangulärt schema, en s.k. utökad matris eller totalmatris. Vi exemplifierar med systemet (1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right) \tag{6}$$

Hur löser man system av typen (6)?

Lösningsritual

- Man använder sig av en systematisk metod, *Gausselimination*, som i korthet innebär att obekanta successivt elimineras från systemet, genom elementära radoperationer, som ser till att de omformade
- Man slutar när man har fått ekvationssystemet på trappform.
- Sedan löser man ut de obekanta nerifrån och upp, med bakåtsubstitution.

Elementära radoperationer

Då en elementär radoperation utförs, får man ett system, som är ekvivalent med det ursprungliga systemet. De elementära radoperationerna är:

- **Elimination** När man adderar en multipel av en rad till en annan rad.
- **Skalning** När man multiplicerar en rad med en konstant $\neq 0$.
- **Byte** När man byter plats på två rader.

Matriserna M_1 och M_2 kallas radekvivalenta, med beteckning $M_1 \sim M_2$, om $\mathcal{M}_1$ övergår i M_2 genom en sekvens av elementära radoperationer.

Exempel

Lös

$$\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ -2x + y + 3z = 9 \\ 4x + 2y + z = 11 \end{cases} \tag{7}$$

Lösningsförslag

Vi använder utökade matriser. (7) blir då

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{r2+2r1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \\ 4 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \\ 4 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{r3+(-4)r1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \\ 0 & -10 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \\ 0 & -10 & 5 & -5 \end{array}\right) \overset{r3+10/7r2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & \frac{45}{7} & \frac{135}{7} \end{array}\right)$$

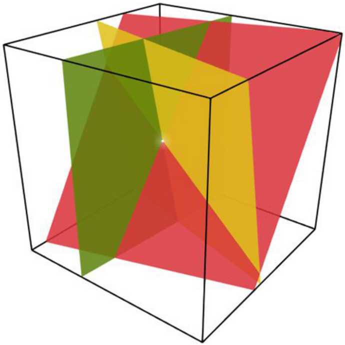
Bakåtsubstitution ger att $z = 3$, $y = (17-3)/7 = 2$ och $x = 4 + 3 - 3 \cdot 2 = 1$. Vi har funnit att

$$\begin{cases} x = & 1 \\ y = & 2 \\ z = & 3 \end{cases}$$

är (den entydiga) lösningen till (7).

Tolkning

Geometrisk tolkning av lösningen: Varje ekvation bestämmer ett plan i $\mathbb{R}^3$. När vi har precis en lösning, skär planen varandra i precis en punkt.



Pivotelement

När vi löste föregående exempel, spelade en del koefficienter en speciellt viktig roll. I första steget använde vi första ekvationen för att eliminera x ur den andra och tredje ekvationen. Det är då väsentligt att x-koefficienten i första ekvationen är $\neq 0$.

Denna koefficient kallas pivotelement. I steg 2 elimineras y ur den tredje ekvationen med hjälp av den andra ekvationen, med y-koefficienten som pivotelement.

Definition

- Pivotelementet för en rad är det första elementet $\neq 0$ (det s.k. ledande elementet) i raden.
- En rad med enbart nollor saknar pivotelement.
- En matris har trappform om varje pivotelement står till höger om de föregående pivotelementen.
- De kolonner i matrisen som innehåller pivotelement kallas pivotkolonner.

Kopplingen mellan antalet pivotelement i en trappstegsmatris och lösbarheten hos ett ekvationssystem skall vi beröra under nästa lektion.

Exempel

Lös med Gausselimination ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 4y + z = 3 \\ 2x - y - 3z = 2 \end{cases}$$

Svar: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Fria och bundna variabler

Vi skall lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y + 2z = 9 \\ x + 4y + 7z = 6 \end{cases} \tag{8}$$

Lösningsförslag

Vi använder utökade matriser. (8) blir då

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{r2+(-2)r1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{r3+(-1)r1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \bigm| & 4 \\ 0 & 1 & 4 & \bigm| & 1 \\ 0 & 2 & 8 & \bigm| & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3+(-2)r2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \bigm| & 4 \\ 0 & 1 & 4 & \bigm| & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bigm| & 0 \end{pmatrix}$$

Den utökade matrisen är nu trappformad, och vi konstaterar att matrisen har 2 pivotelement.

Viktiga anmärkningar

- Variabler, som hör till matrisens pivotelement, kallas bundna.
- Övriga variabler kallas fria.
- Ett ekvationssystem som i likhet med (8) har färre ekvationer än obekanta, kallas underbestämt. Då behövs alltid parametrar för att beskriva lösningen (om den nu existerar).
- Lösningarna får vi genom att införa parametrar för de fria variablerna och sedan lösa ut de bundna variablerna med bakåtsubstitution.

Pivotelement – bundna variabler

I vårt exempel finns pivotelementen i kolonn 1 och 2. Alltså är variablerna x och y bundna medan z är fri. Låt oss sätta $z = t$.

Lösningarna till ekvationssystemet blir:

$$\begin{cases} x = & 2 + 9t \\ y = & 1 - 4t \\ z = & t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

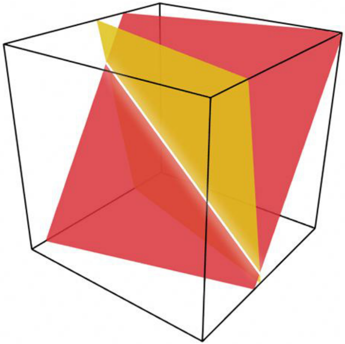
På vektorform blir lösningen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

En-parametrig lösning

Geometrisk tolkning av lösningen: Varje ekvation bestämmer (som vi redan vet) ett plan i $\mathbb{R}^3$. När vi har en en-parametrig lösning, skär planen varandra längs en rät linje. Vårt exempel:

$$\begin{cases} x = & 2+9t \\ y = & 1-4t \ , \ t \in \mathbb{R}. \\ z = & t \end{cases}$$



Rang=antal pivotelement

Rangen till en matris A, beteckning $\operatorname{rank} A$, är antalet pivotelement i en trappstegsmatris A_1, som är radekvivalent med A.

Rangbegreppet brukar ofta användas i samband med lösbarhetsanalyser av linjära ekvationssystem.

Egenskaper hos $\operatorname{rank} A$

Antag att A är av typ $m \times n$. Sätt $r = \operatorname{rank} A$.

- $r \leq m$ (Antal pivotelement kan inte vara större än antal rader)
- $r \leq n$
  (Antal pivotelement kan inte vara större än antal kolonner)
- A har full rang om $r = n$.
  (Varje kolonn har ett pivotelement. Inga fria variabler.)

Exempel

Givet matrisen

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Beräkna $\operatorname{rank} \mathsf{A}$. (Svar: 2)

Exempel–olösbart system

Lös

$$\begin{cases} \quad\;\; y - 2z = -5 \\ 2x - y + \;\; z = -2 \\ 4x - y \qquad\; = -4 \end{cases} \tag{9}$$

Lösningsförslag

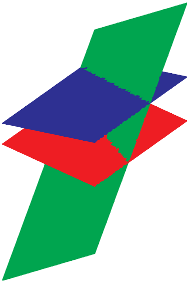
Vi använder utökade matriser. (9) blir då

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{r1 \leftrightarrow r2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{r3+(-2)r1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r3+(-1)r2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Den sista raden motsvarar $0z = 5$, vilket är falskt. Härav ser vi att systemet saknar lösning, vilket illustreras i nedanstående figur.



Anmärkning

Vi bestämmer $r_1 = \operatorname{rank} \mathsf{A}$ resp. $r_2 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$. Efter fullbordad Gausseliminering konstaterar vi:

$$r_1 = 2, \qquad r_2 = 3.$$

Detta är en konsekvens av en klassisk sats från den linjära algebran:

Det linjära ekvationssystemet $\mathsf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart

$$\Leftrightarrow$$

$$\operatorname{rank} \mathsf{A} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

The LINPACK Benchmark

The LINPACK Benchmark är ett verktyg som mäter en dators beräkningskapacitet. Datorn skall lösa ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genom s.k. flyttalsoperationer (flops).

Rekordet innehas för närvarande (juni 2013) av den kinesiska superdatorn Tianhe-2, som har kapaciteten med ofattbara 33.86 petaflops/sek. Peta är ett SI-prefix som innebär 10^{15}.

Linpack kan laddas ner för exempelvis Android och Iphone. Kolla om din telefon kan komma i närheten av Tianhe-2...

Homogena ekvationssystem

Ett linjärt ekvationssystem är homogent om högerledet är noll, dvs då systemet står på formen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Med andra ord: Låt A vara en $m \times n$-matris (m rader, n kolonner). Systemet A$\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är homogent om $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

När existerar det icke-triviala lösningar till homogena system?

Homogena system har

- alltid lösningar: antingen den triviala lösningen eller oändligt många lösningar,
- oändligt många lösningar om och endast om systemet har minst en fri variabel.

Avslutande exempel

Bestäm lösningsmängden till matrisekvationen

$$\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

där

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lösningsförslag

Vi Gausseliminerar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 1 & 5 & 0 \\ 0 & \color{red}{-1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Här konstaterar vi att x_3 är fri medan x_1 och x_2 är bundna variabler. Vi får den en-parametriga lösningen

$$\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R},$$

Anmärkning

Betrakta ekvationssystemet $\mathsf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Antag att A har n kolonner (=antalet obekanta)

Antalet bundna variabler är $r = \operatorname{rank} \mathsf{A}$ (antalet pivotelement)

Antalet fria variabler (=parametrar) är $\nu = \dim \operatorname{Nul} \mathsf{A}$ (nolldimensionen för A)

$$\nu + r = n.$$

Denna formel kallas Dimensionssatsen i den linjära algebran.

Vårt exempel

- $r = 2$
- $\nu = 1$
- $\nu + r = 1 + 2 = 3$. Stämmer.

Öva på egen hand

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + \ \ y - 2z = 0 \\ -2x - 5y + \ \ z = 0 \\ x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

Svar: $x = 3t, \quad y = -t, \quad z = t$

För den intresserade

Beräkna för alla $a \in \mathbb{R}$ rangen av matrisen

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a+3 & 3a-1 \\ 1 & 2a^2 & 2a^2-1 \end{bmatrix}$$

Svar: rank A $= \begin{cases} 3 & \text{om } a \neq \pm 1 \\ 2 & \text{om } a = -1 \\ 1 & \text{om } a = 1 \end{cases}$