M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Linjär Algebra, Föreläsning 12

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -2x - 5y + z = 0 \\ x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

Invers till kvadratiska system

Vi återvänder till ett moment i Föreläsning L9, vilket vi flyktigt berörde.

Exempel Bestäm inversen till matrisen

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi ska lösa problemet med hjälp av linjära ekvationssystem.

Lösningsförslag

Vi löser systemet A$\mathbf{x} = \mathbf{y}$, dvs.

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 = y_1 \\ 2x_1 - x_2 = y_2 \end{cases}$$

och får efter hand

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 = x_1 \\ 2y_1 + 5y_2 = x_2 \end{cases} \quad .$$

Således är

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathsf{A}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} \quad .$$

Kontroll visar att

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \mathsf{I}.$$

Kontrollera själv $\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}$.

Gauss-Jordans metod

Vi nyttjar följande teknik för att lösa uppgiften:

$$
\begin{aligned}
&(\mathsf{A} \mid \mathsf{I}) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r2+(2/5)r1} \\
&\left(\begin{array}{cc|cc} -5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{5r2} \left(\begin{array}{cc|cc} -5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r1+(-3)r2} \left(\begin{array}{cc|cc} -5 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{(-1/5)r1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \rightarrow (\mathsf{I} \mid \mathsf{A}^{-1}) \quad .
\end{aligned}
$$

Sats

Om den kvadratiska matrisen A är inverterbar, så har systemet $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ exakt en lösning för varje $\mathbf{y}$. Denna lösning ges av

$$\mathbf{x} = \mathsf{A}^{-1}\mathbf{y} \quad .$$

Matrisekvationer

En viktig tillämpning på matriskalkyl i allmänhet och matrisinvers i synnerhet finner vi i de s.k. matrisekvationerna.

Här gäller det att tillämpa räknereglerna för matrisinverser.

Exempel

Lös X ur matrisekvationen

$$\mathsf{AXB} = \mathsf{C} - 2\mathsf{XB}, \quad \text{där } \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ resp. } \mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösningsförslag

$$AXB = C - 2XB$$
$$AXB + 2XB = C$$
$$(A + 2I)XB = C \quad \text{(Bryt ut XB till höger)}$$
$$\text{Mult fr vänster med } (A + 2I)^{-1}$$
$$\underbrace{(A + 2I)^{-1}(A + 2I)}_{=I} XB = (A + 2I)^{-1}C$$
$$XBB^{-1} = (A + 2I)^{-1}CB^{-1}$$
$$X = (A + 2I)^{-1}CB^{-1}$$

Kontrollräkna på egen hand

Matrisen X är av typ 3×2

$$(\mathsf{A} + 2\mathsf{I})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Om determinanter och linjära ekvationssystem

För kvadratiska linjära ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gäller

	Homogena system	*Inhomogena system*
$\lvert A \rvert = 0$	Det existerar icke-triviala lösningar	Ingen eller oändligt många lösningar
$\lvert A \rvert \neq 0$	Endast trivial lösning	Entydig lösning

Determinanten är ett utmärkt verktyg när vi analyserar lösbarhetsfrågor.

Kopplingen mellan matrisrang, determinant och lösbarhet

Antag att A är en kvadratisk matris, av typ $n \times n$. Följande påståenden är ekvivalenta:

- A är inverterbar.
- $\mathrm{rank}(\mathsf{A}) = n$.
- $|\mathsf{A}| \neq 0$
- $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig/trivial lösning.

Exempel

Antag att

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Vilket/vilka påståenden är sanna?

(A) $\operatorname{rank} \mathsf{A} = 2$.

(B) $|\mathsf{A}| = 0$.

(C) A^{-1} existerar.

Avslutande exempel

För vilka värden på p har ekvationssystemet

$$\begin{cases} (p-2)x + 2y + z = 7 \\ 3x + py + (p+3)z = -3 \\ (p+2)x + (p+2)y + (p+5)z = 3 \end{cases}$$

ingen lösning, entydig lösning respektive oändligt många lösningar?

Lösningsförslag

Determinanten beräknas:

$$|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix} p-2 & 2 & 1 \\ 3 & p & p+3 \\ p+2 & p+2 & p+5 \end{vmatrix} \underset{k3+(-1)k2}{=} \begin{vmatrix} p-2 & 2 & -1 \\ 3 & p & 3 \\ p+2 & p+2 & 3 \end{vmatrix} \underset{r3+(-1)r2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} p-2 & 2 & 1 \\ 3 & p & p+3 \\ p-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Med t. ex. Sarrus regel får vi $|\mathsf{A}| = p(p-1)$.

3 fall

Vi har $|\mathsf{A}| = 0 \Leftrightarrow p(p-1) = 0$, vilket leder till tre fall:

Fall 1 $\quad p \neq 0, p \neq 1$ Här är $|\mathsf{A}| \neq 0$. Systemet har entydig lösning.

Fall 2 $\quad p = 0$

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 7 \\ 3x \phantom{{}+2y} + 3z = -3 \\ 2x + 2y + 5z = 3 \end{cases}$$

$p = 0$ medför oändligt många lösningar:
$x = 1 - t, \quad y = 5/2 - 3t/2, \quad z = t$. Kontrollera!

Fall 3 $\quad p = 1$

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 7 \\ 3x + y + 4z = -3 \\ 3x + 3y + 6z = 3 \end{cases}$$

För $p = 1$ saknas lösningar. Kontrollera!

Extra: Geometrisk tillämpning

Problem: Bestäm ekvationen för den räta linje som innehåller punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2).
Vi skriver linjens ekvation på formen $ax + by + c = 0$. Det innebär

$$\begin{cases} ax + \ \ by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases} \quad \text{eller}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi söker icke-triviala lösningar till detta homogena system. Det inträffar då

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Vi utför determinantkalkylen.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Utv. efter $k3$ ger att determinantekvationen blir

$$\begin{aligned} x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1) &= x_(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) \\ (x_2 - x_1)(y - y_1) &= (y_2 - y_1)(x - x_1) \\ y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad \text{(Tvåpunktsformeln)} \end{aligned}$$

och vi är klara.

Övning

Beräkna med determinantkalkyl ekvationen för den räta linje som passerar genom punkterna $(1, 2)$ och $(-2, 0)$.

Räkna på egen hand

För vilka värden på p har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ x + py + 4z = p \\ x - y + pz = 2 \end{cases}$$

ingen lösning, entydig lösning respektive oändligt många lösningar?

Svar $p = 3$ oändl. många lsg., $p = -1$ lsg. saknas, $p \neq -1, 3$ entydig lsg.

Att öva på

Givet matriserna

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- Beräkna A^{-1}. (Svar $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$)
- Lös $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ på två sätt. (Svar $\begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$)

Ännu mer att öva på

Lös X ur matrisekvationen

$$\mathsf{AX} - \mathsf{B} = \mathsf{A}, \quad \text{där } \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ resp. } \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svar $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$