M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Linjär Algebra, Föreläsning 13

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Lös matrisekvationen

$$\mathsf{AXB}^{-1} = \mathsf{A} + \mathsf{B}^T$$

om

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar $\mathsf{X} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 11 & -1 & 14 \\ -4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

Egenvärden

Begreppet egenvärde och egenvektor är viktiga verktyg i mångahanda tekniska sammanhang, där begrepp som

- svängningsfrekvenser i vibrerande system,
- huvudspänningsriktningar i elastiska material

är exempel på egenvärdesproblem.
Längst bak i dagens stordior finns ett mekaniskt exempel.

Definition

Antag att A är en kvadratisk matris. Om det reella talet λ och vektorn $\mathbf{x}$ uppfyller

$$\mathrm{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \quad ,$$

där $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, kallas $\mathbf{x}$ respektive λ en egenvektor respektive ett egenvärde till A.

Mängden av alla egenvärden kallas spektrum.

Koppling till matrisalgebra

Med andra ord: λ är ett egenvärde till A om och endast om ekvationssystemet

$$(\mathsf{A} - \lambda\,\mathsf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{1}$$

har icke-triviala lösningar.

Mängden av alla lösningar till (1) utgör nollrummet till matrisen $\mathsf{A} - \lambda\,\mathsf{I}$. Detta rum kallas ibland egenrummet till A.

Den karakteristiska ekvationen

Exempel Låt

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad .$$

Bestäm egenvärden och egenvektorer till A.

Anmärkning

Egenvärdeskriteriet kan alternativt uttryckas: Ett reellt tal λ är ett egenvärde till den kvadratiska matrisen A om och endast om λ är rot till den karakteristiska ekvationen

$$\det(\mathsf{A} - \lambda\,\mathsf{I}) = 0 \quad .$$

Polynomet $\det(\mathsf{A} - \lambda\,\mathsf{I})$ kallas det karakteristiska polynomet.

Avslutande exempel

Bestäm egenvärdena och egenvektorerna till matrisen

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 9)$.

$$\mathbf{v}_{\lambda_1} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\lambda_{2,3}} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Läs och lös på egen hand

Beräkna

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^8 \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \mathsf{A}^8\mathbf{x} \quad .$$

Lösningsförslag-tjuvkika inte

Vi bestämmer egenvärdena och egenvektorerna till matrisen A. Efter en stunds räknande får vi:

- $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi konstaterar att vektorn $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$ kan skrivas som en linjärkombination av egenvektorerna:

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Därför gäller:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\mathbf{x} &= \mathsf{A}(2\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2) = \\ &= 2\mathsf{A}\mathbf{v}_1 - 4\mathsf{A}\mathbf{v}_2 = \\ &= 2\lambda_1\mathbf{v}_1 - 4\lambda_2\mathbf{v}_2 \quad . \end{aligned}$$

Repetera processen:

$$\mathsf{A}^8\mathbf{x} = \ldots = 2\lambda_1^8\mathbf{v}_1 - 4\lambda_2^8\mathbf{v}_2 =$$
$$= 2\cdot(-2)^8\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} - 4\cdot 3^8\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-51976\\-27268\end{pmatrix}.$$

Anmärkning Exemplet visar på en svaghet: Denna lösningsmetod fungerar endast om $\mathbf{x}$ kan skrivas som en linjärkombination av egenvektorerna.

Överkurs I: Symmetriska matriser

För symmetriska matriser (dvs $A = A^T$) med reella egenvärden finns viktiga tillämpningar. Om man bildar matrisen P, där kolonnerna består av egenvektorerna till A, gäller

$$AP = PD,$$

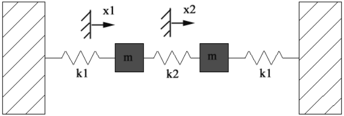
där $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ är en diagonalmatris, innehållande A:s egenvärden.

Eftersom P är ortogonal, betyder det att $P^{-1} = P^T$. Detta leder till den viktiga relationen

$$P^T AP = D.$$

Överkurs II: Egenvärdesproblem i mekaniken

Betrakta vidstående fjäder-mass-system bestående av 2 massor och 3 fjädrar.



Rörelseekvationerna (rörelse i horisontell led):

$$m\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + (k_2 + k_1)x_2 - k_2 x_1 = 0$$

Dividera med m

$$-\frac{k_1 + k_2}{m} x_1 + \frac{k_2}{m} x_2 = \ddot{x}_1$$
$$\frac{k_2}{m} x_1 - \frac{k_1 + k_2}{m} x_2 = \ddot{x}_2$$

Linjärt ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m} & \frac{k_2}{m} \\ \frac{k_2}{m} & -\frac{k_1+k_2}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}$$

Sätt $\alpha = \dfrac{k_2}{m}$, $\beta = \dfrac{k_1 + k_2}{m}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix} \mathbf{x} = \ddot{\mathbf{x}} \quad \text{eller} \quad \mathsf{A}\mathbf{x} = \ddot{\mathbf{x}}$$

$$\text{där} \quad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix}$$

Egenvärdesproblem

Eftersom systemet är odämpat, ansätter vi följande lösning:

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{i\omega t}, \quad \text{varav} \quad \ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbf{x}$$

Detta är inget annat än ett egenvärdesproblem:

$$\mathsf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \quad \text{där } \lambda = -\omega^2.$$