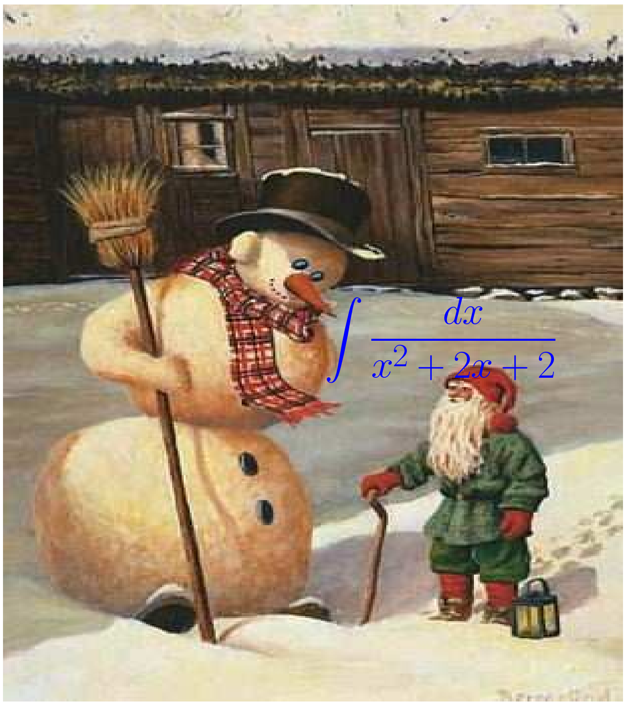
Julpaket, M0043M, 2014.

Staffan Lundberg,
Inst. för teknikvetenskap och matematik, LTU.

11 december 2014



Copyright © 2014 by Staffan Lundberg

Innehåll

Inledning

Detta dokument, som inte utger sig för att ge en heltäckande bild av kursen, vill vara en hjälp för Dig att repetera några moment i kursen M0043M.

Börja med att läsa igenom texten som hör till varje avsnitt, Försök därefter att lösa några uppgifter i varje del. Misslyckas Du: Läs och repetera motsvarande avsnitt i kursboken eller i stordior/skrivplattor.

Läs och helst räkna igenom för problemet relevanta typexempel boken/mina stordior presenterar. Atervänd sedan till Din ofullbordade lösning. Förhoppningsvis går det bättre denna gång!

Tillsammans med en önskan om en God Jul och ett Gott Nytt År vill jag önska dig all lycka med repetitionsarbetet!

Staffan.

1 Forsling-Neymark(FN), kapitel 5-6

1.1 Avsnitt 5.1-5.5

Begreppet primitiv funktion s. 236-237 är väsentligt. På s. 239 listas för kursen viktiga primitiva funktioner. Dessa måste Du behärska. Glöm inte integrationskonstanten vid obestämda integraler!

Sats 5.3 beskriver viktiga räkneregler. Satsen bygger på integralens linjära egenskaper. Ex 5.5 jätteviktigt. Enda gången man ska dividera med inre derivatan är när den inre funktionen är av högst grad 1 (linjär funktion).

Avsnitt 5.2 beskriver viktiga integrationsmetoder, den partiella integrationen respektive variabelbytet. Grundtanken i den partiella integrationen är att som regel sänka gradtalet hos potensfunktionen x^r genom derivering. Ibland måste dock potensfunktionen integreras, se Ex 5.9.

I avsnittet berörs också variabelbytet, också jätteviktig metod. Bra exempel i läroboken. Läs dessa!

Avsnittet 5.3 berör tekniker hur man integrerar rationella funktioner. Viktigt: Kolla gradtalet hos täljaren. Ar detta gradtal $\geq$ gradtalet hos nämnaren: Utför polynomdivision.

Kvadratkomplettering är också ett viktigt verktyg i dessa sammanhang, Ex 5.21. Även uppdelning i partialbråk förekommer ofta, se Exempel 5.22-5.24.

Avsnitten 5.4 - 5.5 beskriver speciella tekniker när man integrerar trigonometriska uttryck respektive rotuttyck. Exemplen innehålla många teknikaliteter som kan vara svåra att förstå.

1.2 Avsnitt 6.1-6-4

Kapitlet inleds med integralens areatolkning. I avsn. 6.1 redogörs för över- och undersummor, viktiga pusselbitar i den bestämda integralens definition. Glöm inte Def. 6.3 på s. 278. Praktisk att använda i många integralsammanhang.

Avsnittet 6.4 frigör integralbegreppet från areatolkningen. En fundamental sats är Analysens Huvudsats, Sats 6.7 s. 285. Bra exempel: Ex 6.10-6.11.

I avsnittet knyter man samman huvudsatsen med teknikerna i kap. 5. Viktigt avsnitt som du förutsätts behärska.

1. Beräkna $\displaystyle\int \frac{4x^3 - 5x^2 + 4x + 1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx.$

2. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx.$

3. (a) Beräkna

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 9x}$$

Svara med närmevärde (4 dec)

(b) Bestäm arean av det plana området, begränsat av

$$x = y^2 - \pi^2 \quad \text{och} \quad x = \sin y.$$

Svara med närmevärde (4 dec)

(c) Bestäm samtliga primitiva funktioner till

$$f(x) = (x+3)\,e^{2x}.$$

4. Lös integralerna (svara exakt, ej närmevärde)

(a)

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx,$$

(b)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot e^{\tan x}\,dx.$$

(c) Kurvan $y = \sqrt{x}$ och dess normal i punkten P=(4,2), begränsar tillsammans med x-axeln ett begränsat område. Bestäm exakt områdets area.

2 (FN), kapitel 7 samt utdelat material

2.1 Avsnitt 7.1-7.3

I avsnittet 7.1 tillämpas integralens areatolkning. Bra exempel: Ex 7.2.

Avsnitt 7.2 beskriver metoder att bestämma längden av funktionskurvan $y = f(x)$. Se Ex 7.5..

Avsnittet 7.3 beskriver olika tekniker vid volymbestämning. Det generella volymselementet $dV = A(x)\,dx$ har viktigt specialfall: Rotationsvolymer kring bägge axlarna. Du ska behärska både cirkulära tvärsnitt och cylindriska skal.

2.2 Avsnitt 7.6 samt utdelat material

Trapetsregeln är en viktig numerisk metod för approximering av bestämda integraler av typen

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Trapetsregeln med steglängd h:

$$A \approx T(h) = h \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + h \cdot \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2}.$$

Delintervallens längd $h = (b - a)/n$.

5. Beräkna volymen av det begränsade området

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \arctan(x),$$

roterat runt y-axeln. Svara exakt el. närmevärde (4 dec)

6. Låt R vara området begränsat av kurvan $f(x) = (x+1)^4$, x-axeln och linjerna $x = 0$ och $x = 2$. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer genom att rotera R kring x-axeln. Svar exakt eller med närmevärde (2 dec).

7. Approximera

$$\int_0^1 \cos(x^2 + x)\, dx$$

med trapetsregeln, steg $h = 0.125$.

3 Lemurell (L), kapitel 5

3.1 Avsnitt 5.1-5.5

Begreppet linjära ekvationssystem inleder den första delen av kursen i Linjär algebra. Vi känner nog igen lösningsstrategin för ekvationssystem med två ekvationer och två obekanta från gymnasiet.

Överbestämda ekvationssystem, dvs. system där antalet ekvationer överstiger antalet obekanta, beskrivs lösningarna till överbestämda system som regel med hjälp av en parameter. Lösning saknas som regel (men kan approximativt bestämmas med s.k. minstakvadrat-teknik).

Om ekvationssystemet är underbestämt, dvs. har färre ekvationer än obekanta, kan s.k. icke-triviala lösningar existera. De är i så fall oändligt många.

I avsnitt 5.3.1 införs begreppet totalmatris (eller utökad matris). När man löser ett linjärt ekvationssystem, använder man sig av en speciell metod: Gausseliminationen. Den bygger på s.k. tillåtna radoperationer, s. 151. Lösningen mynnar ut i ett ekvationssystem på trappform, Ex. 5.4 s. 150. Gausseliminationen åtföljs av den s.k. bakåtsubstitutionen, vilken fullbordar ekvationslösningen.

I avsnitt 5.5 beskrivs homogena ekvationssystem, dvs. system där högerledet är nollvektorn. Proposition 5.31 är viktig: Homogena system är alltid lösbara.

Avsnitt 5.4 behandlar matrisinvers (även om begreppet flyktigt berörs i avsnitt 2.3), en viktig tillämpning av kvadratiska matriser. I avsnittet används Gauss-Jordans algoritm (Exempel 5.30, s. 169) för matrisinvertering.

Anm Uppgifterna 10-13 löses lämpligen i samband med repetition av kapitel 6.

8. Lös ekvationssystemet

   (a)
$$\begin{cases} 5x + 2y + 2z = 7 \\ x - y + 3z = 8 \\ 3x - y - 3z = -2 \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

9. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 3x + y - 5z = 8 \\ 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ x - 2y + 4z = -3 \end{cases}$$

10. Ange för alla reella a lösningsmängden till ekvationssystemet
$$\begin{cases} -2x + y + 2z = 3 \\ ax + 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases}$$

11. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$$

skall ha någon lösning?

12. Bestäm varje värde på konstanten a för vilket det existerar en rät linje parallell med de tre planen $x + y + z = 1$, $ax + (a + 3)y + z = 2$, $5x – ay + 2z = 3$.

13. Bestäm för varje a–värde antalet lösningar till systemet

$$\begin{cases} 2ax + 3y + az = 4a \\ x + (a–1)y = a \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

4 (L), kapitel 2

4.1 Avsnitt 2.1, 2.3

I detta kapitel får matriserna sin definitiva presentation. Observera storleksangivelsen: En matris är av typen $m \times n$ har m rader och n kolonner. Kvadratiska matriser är ett viktigt specialfall. Rad- och kolonnvektorer likaså. En radvektor är en $1 \times n$-matris, medan en kolonnvektor är en $m \times 1$-matris.

Ett linjärt ekvationssystem kan med matriser skrivas

$$\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

I avsnittet 2.1 går man igenom de viktigaste räknereglerna:

- Addition och subtraktion
- Multiplikation av matris med reellt tal (skalär)
- Matrismultiplikation

Matrismultiplikationen $\mathsf{C} = \mathsf{AB}$ är speciell. Om A är $m \times n$, B är $n \times p$ (OBS att A har lika många kolonner som B har rader), beräknas c_{ij} som skalärprodukten mellan A:s i-te rad och B:s j-te kolonn.

Notera begreppet enhetsmatris (identitetsmatris) (Prop. 2.35, s. 78, samt s.79).

4.2 Avsnitt 2.2

I detta avsnitt definieras determinanten för 2×2- och 3×3-matriser.

Begreppet determinant hör samman med kvadratiska matriser. Determinanten har en omedelbar geometrisk tolkning: Area/Volym med tecken: Se s. 70ff. Sarrus regel (s. 73) är användbar för determinanter av högst tredje ordning.

Notera räknereglerna i Prop. 2.31, s. 76.

14. Sätt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ och

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Beräkna AB^T. Beräkna $(AB)^T$.

15. Bestäm inversen till matrisen

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & -11 & -3 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

16. Beräkna $B^{-1}A^{-1}$ då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

17. Lös matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathsf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

5 (L), kapitel 6

5.1 Avsnitt 6.1, 6.3

Här generaliseras begreppet determinant till godtyckliga kvadratiska matriser.

Sats 6.5 säger att determinanten till en över- eller undertriangulär matris är produkten av diagonalelementen. I Exempel 6.6 används bl.a. Gausselimination för att generera en trappstegsmatris. Sedan är determinantbestämningen enkel.

I mina stordior till Föreläsning L10 går jag igenom en användbar algoritm för beräkning av godtyckliga determinanter: Man gör en s.k. Laplace-utveckling efter rad eller efter kolonn.

Lär dig att kombinera räkneregler för determinanter med Laplace-utveckling. Sträva efter att få så många nollor som möjligt i en rad/kolonn innan du gör Laplace-utveckling.

Anmärkning: Lemurell har valt att utesluta Laplaceutvecklingen (s. 195) och har valt en annan väg, där kombinatorik utnyttjas.

Detta görs i avsnitt 6.2, vilket faller utanför kursens ramar.

18. Beräkna

(a)

$$\begin{vmatrix} 12 & 7 & 32 \\ 18 & 14 & 24 \\ 6 & 7 & 16 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Determinantteorin tillämpas ofta på kvadratiska ekvationssystem. Med determinanter kan man analysera lösningar till sådana ekvationssystem. Se mina stordior till Föreläsning L12.

Anm Här är det lämpligt att lösa uppgifterna 10-13.

6 (L), kapitel 8

6.1 Avsnitt 8.1-8.2

Egenvärden och egenvektorer avslutar kursmomentet i linjär algebra. Man studerar

$$\mathsf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \quad \text{där } \mathsf{A} \text{ är av typ } n \times n.$$

Skalären λ kallas egenvärde, medan tillhörande vektor $\mathbf{x}$ kallas egenvektor. Determinanten är här ett viktigt verktyg. Man söker icke-triviala lösningar till det homogena systemet $(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}_n)\mathbf{x} = \mathsf{0}$, där I_n är enhetsmatrisen av typ $n \times n$. Det ger upphov till en ekvation i λ, den s.k. karakteristiska ekvationen

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}_n) = 0.$$

Egenvärdesteorin har en stark koppling till tillämpade problem i bl.a. hållfasthetslära.

19. Bestäm egenvärden och egenvektorer till:

    (a)
    $$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

    (b)
    $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

20. Bestäm A^{11} då
    $$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

7 (L), kapitel 1

7.1 Avsnitt 1.1-1.2

Med avsnittet 1.1 inleds den egentliga vektorläran. På komponentform skrivs en vektor på kolonnform: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$.

Med fotpunkt och spets givna på koordinatform, kan komponentformen lätt beräknas med minnesregeln ”spets minus fotpunkt”, s. 35.

Lägg märke till viktiga räkneregler, sammanfattade i Prop. 1.8 s. 10. I Ex. 1.6 s. 8, beskrivs en viktig egenskap: parallella vektorer är proportionella: $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} = t \cdot \mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}$.

På s. 6 definieras hur en vektors längd $|\mathbf{v}|$, (lärobokens beteckning $\|\mathbf{v}\|$). Observera att $|\mathbf{v}|$ är en skalär storhet. På s. 12 beskrivs också den viktiga normeringen, dvs. hur man skalar om en vektor till att få enhetslängd (=1). Sådana vektorer, enhetsvektorer, är viktiga verktyg i vektorläran. $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

21. Bestäm de värden på a för vilka vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a+1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} a \\ 4 \\ -a \end{bmatrix}$ är parallella.

22. Undersök om vektorerna $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ligger i samma plan.

23. Är punkterna $P : (3, 7, -2)$, $Q : (5, 5, 1)$, $R : (6, -2, 2)$ samt $S : (4, 0, -1)$ hörn i en parallellogram?

24. En cirkel med medelpunkten i $M : (-4, 1)$ har ändpunkten till en diameter i punkten $P : (2, 6)$. Var ligger denna diameters andra punkt?

25. För vilket värde på a kan vektorerna $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$ bilda sidor i en triangel?

7.2 Avsnitt 1.5

I Avsn 1.5 införs basbegreppet på ett intuitivt sätt. Definition 1.33 s. 30 beskriver hur en vektor skrivs som en linjärkombination av ortogonala enhetsvektorer, basvektorerna. I exempelvis $\mathbb{R}^3$ är basvektorerna

$$\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorerna ovan är riktningsvektorer för de tre koordinataxlarna. De har samtliga längd 1 och är inbördes ortogonala. Man brukar prata om ON-baser i detta sammanhang. ON=Orto-Normerad. Se s. 31.

7.3 Avsnitt 1.3

I avsnitt 1.3 berörs den ena av de två viktiga produkterna: Skalärprodukten, som levererar en skalär.

Skalärprodukten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, där "gångertecknet" måste tydligt markeras, har sin definition på s. 14 samt Sats 1.38 s. 34, där komponentformen för skalärprodukt i en ON-bas presenteras. Bägge varianterna måste behärskas.

Räknereglerna för skalärprodukt sammanfattas i Prop. 1.19, s. 17.

I Prop. 1.16, s. 15, står också ett jätteviktigt kriterium för ortogonala vektorer (en konsekvens av definitionen):

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

En omedelbar tillämpning av skalärprodukten är den vinkelräta projektionen av $\mathbf{v}$ på linjen L, med beteckningen $\mathbf{v}_L$, längs enhetsriktningsvektorn $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{v}_L = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\, \mathbf{e}.$$

Se Sats 1.20 s. 19.

Den viktiga komposantuppdelningen beskrivs i Fig. 1.11, s.16.

7.4 Avsnitt 1.4

I avsnitt 1.4 berörs den andra av de två viktiga produkterna:

Vektor- (eller kryss-)produkten, vars resultat är vektoriellt. Se Def. 1.27 s. 25.

Räknereglerna för kryssprodukt sammanfattas i Prop. 1.32, s. 27. Observera att kryssprodukt är relevant enbart i $\mathbb{R}^3$.

I en ON-bas gäller komponentformen för kryssprodukten, se avsnitt 1.5.2:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}.$$

Denna vektor ska inte memoreras. Man plockar fram den med hjälp av Sarrus regel s. 73.

I Avsn 1.4 behandlas även den geometriska tolkningen av kryssprodukten.

26. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

27. För vilka värden på a är vektorerna $\begin{bmatrix} a \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2a \\ a \\ -4 \end{bmatrix}$ vinkelräta?

28. Bestäm en **enhetsvektor** i yz–planet som är vinkelrät mot vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

29. Bestäm en vektor vars vinklar med positiva x–, y– och z–axlarna är $\pi/3$, $3\pi/4$ resp $2\pi/3$ och vars längd är 2.

30. Bestäm projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ på vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

31. Bestäm projektionen och dess längd av $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

32. Skriv vektorn $\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ som en summa av två vektorer, varav den ena är parallell med $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och den andra är vinkelrät mot samma vektor.

33. Bestäm de båda **enhetsvektorer** som är ortogonala mot vektorerna $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

34. Ange ett värde på talet a så att ekvationen $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$ blir lösbar.

7.5 Avsnitt 1.6.1

I avsnitt 1.6.1 beskrivs räta linjen i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$. För det plana fallet känner vi redan till $y = kx + m$. Det nya är att man kan parameterframställa en rät linje: $P = P_0 + t\mathbf{v}$, där $\mathbf{v}$ är en riktningsvektor till linjen. Här är några vanliga former på beskrivningar av en rät linje (O är ett referens-origo):

$$L : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}$$

$$L : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$L : \begin{cases} x &= x_0 + \alpha\, t \\ y &= y_0 + \beta\, t \\ z &= z_0 + \gamma\, t \end{cases}$$

Observera: I $\mathbb{R}^3$ finns bara en form av rät linje: Den parameterframställda.

35. Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkterna P_1 : $(1, 0, –2)$ och $P_2 : (4, 6, 2)$.

36. Avgör om någon av punkterna $P_1 : (1, 4, –1)$ eller $P_2 : (–1, 3, –6)$ ligger på linjen

$$L : \begin{cases} x &= 3 + 2t \\ y &= 5 + t \\ z &= 2 + 4t \end{cases}$$

37. Avgör om linjerna

$$L_1 : \begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= 3 - t \\ z &= 7 + t \end{cases} \quad \text{och} \quad L_2 : \begin{cases} x &= -1 - t \\ y &= 2 + 8t \\ z &= 0 + 6t \end{cases}$$

skär varandra.

7.6 Avsnitt 1.6.2

I detta avsnitt behandlas planets ekvation. Begreppet normalvektor får här en viktig tillämpning. Planets ekvation har tre former, som ska behärskas:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \\
&Ax + By + Cz + D = 0 \\
&\overrightarrow{P_0P} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}
\end{aligned}$$

Planets normalvektor bestäms ofta som en kryssprodukt mellan två vektorer i planet, Ex. 1.48, s. 43.

I Ex. 1.49, s. 44, behandlas komposantuppdelning, jfr kapitel 7.3.

7.7 Avsnitt 1.6.3

I avsnittet behandlas en viktig tillämpning: avståndsberäkningar.

Avst Punkt-Linje Se Ex. 1.51 s. 46.

Avst Linje-Linje Egentligen är det fråga om en avståndsberäkning mellan två parallella plan. Se mina stordior Lekt 6.

Avst Punkt-plan Se Ex. 1.52 s. 47.

Avst Linje-Plan Egentligen är det fråga om en avståndsberäkning mellan en punkt (på linjen) och planet. Linjen och planet förutsätts vara parallella.

38. Sök ekvationen för den linje som går genom punkten $P : (1, 2, 1)$ och är vinkelrät mot planet $x + 2y – z = 0$.

39. Avgör om punkterna $P_1 : (3, 9, 6)$ och $P_2 : (–2, 5, 3)$ ligger på samma sida eller på olika sidor om planet $x – y – z + 11 = 0$.

40. Bestäm kortaste avståndet mellan planet $x + 2y + 3z = 4$ och punkten $P : (3, 1, 1)$.

41. Bestäm avståndet från det plan som går genom punkterna $P_1 : (4, 3, 2)$, $P_2 : (6, 0, 0)$ och $P_3 : (–2, 8, 4)$ till punkten $Q : (5, 4, 2)$.

42. Beräkna avståndet från punkten $(2, 5, 2)$ till linjen

$$L : \begin{cases} x &= 2 + 2t \\ y &= 0 + t \\ z &= 0 + 2t \end{cases}$$

43. Bestäm avståndet mellan linjerna

$$L_1 : \begin{cases} x &= -1 + 2t \\ y &= -3 + t \\ z &= -t \end{cases} \quad \text{och} \quad L_2 : \begin{cases} x &= 4 + t \\ y &= 2 + 5t \\ z &= 3 + t \end{cases}$$

44. Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten $P : (1, 2, 3)$ och som skär linjen

$$L : \begin{cases} x &= 6 + 3t \\ y &= -2t \\ z &= 4 + 3t \end{cases}$$

vinkelrätt.

45. Ett plan är ortogonalt mot vektorn $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och innehåller punkten P : $(-3, 7, 4)$. Ange planets ekvation.

46. Visa att linjerna

$$L_1 : \begin{cases} x &= 1 + 3t \\ y &= 2 - t \\ z &= 1 + t \end{cases} \quad \text{och} \quad L_2 : \begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= 3 - t \\ z &= t \end{cases}$$

ligger i samma plan och bestäm ekvationen för detta plan.

47. Bestäm a så att vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$ blir parallell med planet $x + 2y + 3z = 1$.

48. Bestäm skärningspunkten mellan planet $2x + y – 2z + 1 = 0$ och linjen

$$L : \begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= 3 + t \\ z &= 1 \end{cases}$$

49. Planen $x + 4y – 3z = 2$ och $3x – y + 2z = 3$ skär varandra längs en rät linje. Angiv linjens ekvation.

8 Svar (förbehåll för ev. fel).

1. $\ln|x-1| - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3\ln(x^2+1)}{2} + C.$

2. 1.

3. (a) $\dfrac{1}{9} \cdot \ln\left(\dfrac{20}{11}\right) \approx 0.066$

   (b) $\dfrac{4\,\pi^3}{3}$

   (c) $\left(\dfrac{2x+5}{4}\right) \cdot e^{2x} + C.$

4. (a) $1 - 2/e.$

   (b) 1.

   (c) 35/6.

5. $\dfrac{\pi^2}{2} - \pi \approx 1.7932$

6. $\dfrac{\pi}{9}\left(3^9 - 1\right) \approx 6870.31$

7. 0.5685

8. (a) (1,–1,2).

   (b) $(t, 2\text{–}t, 3\text{–}t)$.

9. (1,0,–1).

10. $a = -1 \Rightarrow$ olösbart; $a \neq -1$ $x = \frac{-20}{7(a+1)}, y = \frac{11}{7}, z = \frac{5a-15}{7(a+1)}$

11. $a = 3.$

12. $a = -2.$

13. $a \neq -1, a \neq 3 \Rightarrow$ en lösning; $a = -1 \Rightarrow$ ingen lösning; $a = 3 \Rightarrow$ oändligt många lösningar.

14. $\begin{bmatrix} -6 & -7 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -6 & -4 & 5 \end{bmatrix}^T.$

15. (a)

$$\begin{bmatrix} -51 & 3 & 20 \\ -18 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -8 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

16.

$$1/4\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

17.

$$\begin{bmatrix} 0 & 17 & -5 \\ 1 & -9 & 4 \\ 1 & 58 & -20 \end{bmatrix}$$

18. (a) 1008

(b) 22

(c) –9

(d) –18

19. (a) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$. Motsvarande egenvektorer (1,1), (–1,1).

(b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -4$. Motsvarande egenvektorer (4,–3,0), (3,4,5), (3,4,–5).

20.

$$\begin{bmatrix} 2048 & -2048 & 2048 \\ 2047 & -2047 & 2048 \\ 2047 & -2047 & 2048 \end{bmatrix}$$

21. $a = -2$.

22. Nej.

23. Ja.

24. $(-10, -4)$.

25. $a = -2$.

26. $\pi/2$.

27. $a = 2$ och $a = -1$.

28. $\pm\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

29. $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$.

30. $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

31. $\dfrac{8}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, längd $8/3$.

32. $\dfrac{13}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 37 \\ -44 \\ 14 \end{bmatrix}$.

33. $\pm\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$.

34. $a = -5$.

35. $(1 + 3t, 6t, -2 + 4t)$.

36. $(1, 4, -1)$ nej, $(-1, 3, -6)$ ja.

37. Ja.

38. $(1 + t, 2 + 2t, 1 - t)$.

39. Olika sidor.

40. $4/\sqrt{14}$.

41. 1.

42. $\sqrt{20}$.

43. $\sqrt{14}$.

44. $x = 1 + 2t, y = 2, z = 3 - 2t$.

45. $3x + y + 2z = 6$.

46. $y + z = 3$.

47. $a = -5$.

48. $(0, 1, 1)$.

49. $(5t, 13/5 - 11t, 14/5 - 13t)$.