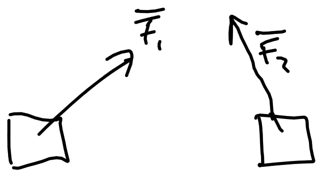
Linjär algebra:

F1 Introduktion till vektoralgebra.

- Vektorer har både storlek och riktning



$\bar{F}_1$ har samma storlek som $\bar{F}_2$ men olika riktning, och ger olika resultat vid förflyttning.

- Vanliga tal (skalärer) har bara storlek
  (t.ex area 2,75 m² har ingen riktning)
  tid 10 sek — " —

Vektorer ritas ut med pilar. 

Betecknas med små bokstäver med pil eller vektorstreck eller i fet stil

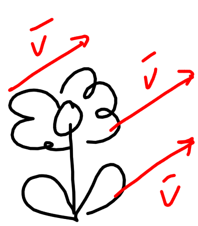
$\bar{v} = \vec{v} = \mathbf{v}$

$a \cdot \mathbf{x} = a \cdot \bar{x}$ talet a multiplicerad med vektor $\bar{x}$.

- $\bar{v}$ = vektor från punkten A till punkten B

$\bar{v} = \overrightarrow{AB}$

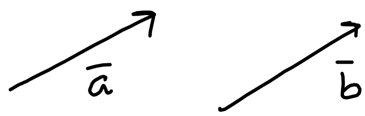
Likhet: vektorer som har samma riktning och storlek är lika, behöver inte börja i samma punkt.



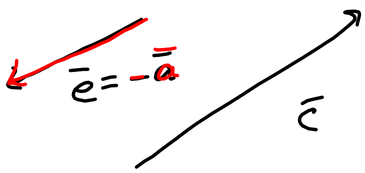
Samma vektor $\bar{v}$ förflyttar blommans alla punkter.

Skalning:

Multiplicera vektorer med tal (skalärer)



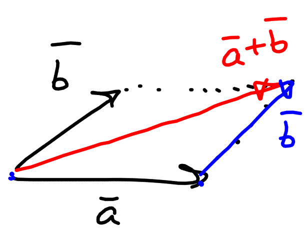
$\bar{a} = \bar{b}$



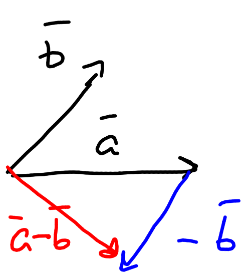
$\bar{c} = 2\bar{a}$

$\bar{d} = -0{,}4 \cdot \bar{a}$

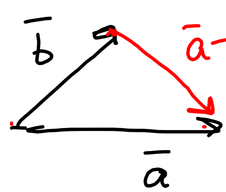
Addera vektorer



$\bar{a}+\bar{b}$
(resultanten i fysik)

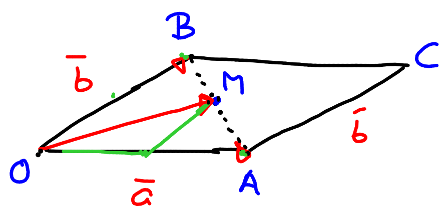


$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$



$\bar{a} - \bar{b} = -\bar{b} + \bar{a}$

ex) parallellogram



O, A, B, C punkter.

$\bar{a} = \overrightarrow{OA}$

$\bar{b} = \overrightarrow{OB}$

Givet: M är mittpunkt på diagonalen $\overline{AB}$

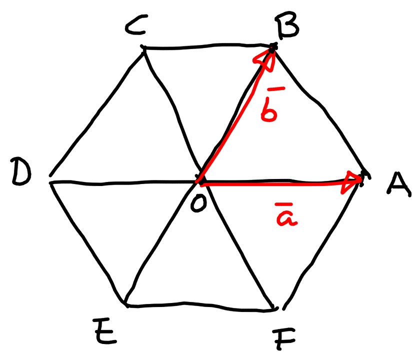
Visa att $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b})$.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}(-\bar{a}+\bar{b})}
\end{aligned}
$$

$(\overline{AB} = \overline{AC}+\overline{CB}+\overline{BA}+ + \overline{AO}+\overline{OB})$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM} \\
&= \bar{a} + \frac{1}{2}(-\bar{a}+\bar{b}) = \bar{a} - \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} \\
&= \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} = \frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b})
\end{aligned}
$$

$\because$ M är mittpunkt på $\overline{OC}$ $(=\bar{a}+\bar{b})$

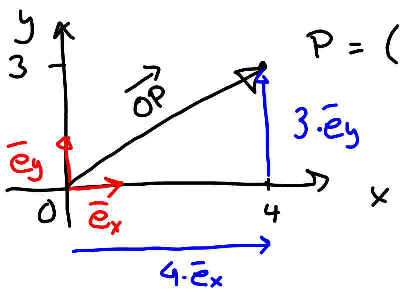


Liksidig 6-hörning.

Uttryck nedanstående vektorer med $\bar{a}$ och $\bar{b}$.

- $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = -\bar{b} + \bar{a} = \bar{a} - \bar{b}$
- $\overrightarrow{OD} = -\bar{a}$
- $\overrightarrow{EB} = 2\bar{b}$
- $\overrightarrow{OC} = \bar{b} - \bar{a}$
- $\overrightarrow{DB} = \bar{b} + \bar{a}$
- $\overline{BF} = -\bar{b} + \bar{a} - \bar{b}$ $\quad (= \underbrace{\overrightarrow{BO}}_{-\bar{b}} + \underbrace{\overrightarrow{OA}}_{\bar{a}} + \underbrace{\overline{AF}}_{-\bar{b}}) = \underline{\bar{a} - 2\bar{b}}$
- $\overline{CF} = 2\bar{a} - 2\bar{b}$
- $\overline{EC} = 2\bar{b} - \bar{a}$

Koordinatsystem:



$P = (4,3)$

Basvektorer:

$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ om

de inte är parallella.

(dvs. ska vara linjärt oberoende)

ON-system : $\{\bar{e}_x, \bar{e}_y\}$ ← ON-bas.

orto - normerat

orto: vinkelräta basvektorer

normerat: som har längd 1.

$\vec{e}_1$ $\quad$ $\vec{e}_2$

· $\bar{e}_1 = 2\bar{e}_2$ och är här linjärt beroende (parallella) och kan inte bilda en bas

---

• Längd = Storlek = Norm av en vektor $\bar{v}$, betecknas $|\bar{v}|$ eller $\|\bar{v}\|$

$\bar{v} = x \cdot \bar{e}_x + y \cdot \bar{e}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ har längden:

$$\boxed{\text{Längd: } |\bar{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

koordinater till vektorn $\overline{OP}$.

---

ex) $$\vec{OP} = \underbrace{4 \cdot \bar{e}_x} + \underbrace{3 \cdot \bar{e}_y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

komposanter, "delvektorer".

Längd:

$$|\overline{OP}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \underline{\underline{5.}}$$

- Ortsvektorer - vektorer som startar i origo.
  - har samma koordinater som slutpunkt

punkt: $P = (-1, 3)$ $\quad Q = (5, 2, 6)$

ortsvektor $\overline{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

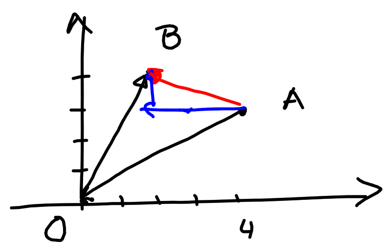
Viktigt!

....

Vektor från A till B : $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overline{OB}}$

$= -\overline{OA} + \overrightarrow{OB}$

$= \boxed{\overline{OB} - \overline{OA}} =$ ortsvekt



$A = (4, 3)$

$B = (2, 4)$

$\overrightarrow{AB} = "B-A" = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2-4 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \bar{e}_x + 1 \cdot \bar{e}_y$

En vektors koordinater mellan 2 punkter beräknas:
"slutpunkt - startpunkt".

ex) $A = (2, \frac{1}{2}, 4)$

$B = (-3, 2, -2)$

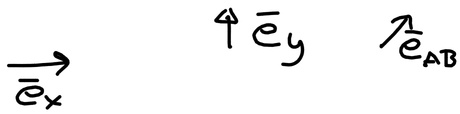
$\overline{AB} = "B-A" = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1{,}5 \\ -6 \end{pmatrix}$

$= \overline{OB} - \overline{OA}$

Längd av $\overline{AB}$: $|\overline{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (1{,}5)^2 + (-6)^2}$

$$\boxed{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Enhetsvektorer har längd 1.



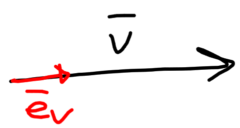
t.ex $\bar{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$$|\bar{v}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

- Normering – bilda en enhetsvektor i samma riktn.

$\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad |\bar{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Dela vektorn med längden



$$\bar{e}_v = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \bar{v}$$

$$\boxed{\bar{e}_v = \frac{1}{|\bar{v}|} \cdot \bar{v}} = \hat{v}$$

ex) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad |\bar{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

Normering av $\bar{u}$: $\Big\}$ $\bar{e}_u = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\frac{1}{|\bar{u}|}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\bar{u}} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$$|\bar{e}_u| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1.$$