$\boxed{F10}$ Egenvärden + Rep. linjär algebra

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + a \cdot y - z = 0 \\ x - y + a \cdot z = 0 \end{cases}$$

Andra lösningar än den triviala $x = y = z = 0$ då determinanten $= 0$.

$$\left| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & a \\ 1 & -1 \end{matrix} = a^2 - 1 - 1 - a - 1 - a$$

$$= a^2 - 2a - 3$$

$\det = 0 \iff a^2 - 2a - 3 = 0$

$\vdots$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

$a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Sätt $z = t$

r.2 $2y - 2t = 0 \iff y = t$

r.1 $x + t + t = 0 \iff x = -2t$

Svar: $\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$a = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sätt $z = t$ (fri variabel)

r.2 $y = -t$

r.1 $x - t + t = 0 \quad x = 0$

Svar: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rep. (Tentaproblem)

Lös matrisekvationen:

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&7\\-2&4\\0&3\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A X B = C - 2\cdot X\cdot B$$

3×3 2×2 3×2 ; 3×2 ; lika, lika

$$A X B + 2 X B = C$$

$$(AX+2X)\cdot B \qquad \text{mult. med } B^{-1} \text{ från höger}$$

$$AX\underbrace{BB^{-1}}_{I} + 2X\underbrace{BB^{-1}}_{I} = C B^{-1}$$

$$AX + 2X = C\cdot B^{-1} \qquad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A+2\cdot I)X = C B^{-1} \qquad 2I=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

mult. med $(A+2I)^{-1}$ fr. vänster

$$\underbrace{(A+2I)^{-1}\cdot(A+2I)}_{I}X = (A+2I)^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$$

$$\underline{X = (A+2I)^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}}$$

$$A+2I = \begin{pmatrix}-1&2&3\\2&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$(A+2I)^{-1}$?

$$\boxed{(A\,|\,I)\sim\sim(I\,|\,A^{-1})}$$

Gauss-Jordan (reducerad trappstegsform).

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\\1&1&1\end{matrix}}_{A}\,\middle|\,\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I}\right) \begin{matrix}(-2)&(-1)\end{matrix} \sim \dots \sim \left(\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I}\,\middle|\,\underbrace{\begin{matrix}-2/3&-1/3&7/3\\1/3&2/3&-5/3\\1/3&-1/3&1/3\end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1&7\\1&2&-5\\1&-1&1\end{pmatrix} \qquad \text{koll: } A^{-1}A=I$$

$$B^{-1}=\frac{1}{\underbrace{\det B}_{=0\cdot0-1\cdot1=-1}}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1&7\\1&2&-5\\1&-1&1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&7\\-2&4\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-1&7\\1&2&-5\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&1\\4&-2\\3&0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\cdot7+(-1)4+7\cdot3&\\&\\&\end{pmatrix}$$

3×2

Egenvärden och egenvektorer till kvadratiska matriser.

$$\bar{x}_{n+1} = A \cdot \bar{x}_n$$

$n = 10$

$$\bar{x}_{11} = A \cdot A \cdot \ldots A \cdot \bar{x}_1 = A^{10} \cdot \bar{x}$$

$$A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}$$

där λ är ett egenvärde
ett tal.

$\bar{x}$ är en egenvektor
till A.

Ugglor:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} j_{n+1} \\ s_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}}_{\bar{x}_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}33 \\ 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}94 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} j_n \\ s_n \\ a_n \end{pmatrix}}_{\bar{x}_n}$$

$$\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} j_0 \\ s_0 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{antal ungar} \\ \text{" 2-åringar} \\ \text{" vuxna} \end{matrix}$$

år 0: $\bar{x}_0$

år 1: $\bar{x}_1 = A \cdot \bar{x}_0$

$\bar{x}_2 = A \cdot \bar{x}_1 = A \cdot A \cdot \bar{x}_0$

$\vdots$

$$\bar{x}_{n+1} = A^n \cdot \bar{x}_0$$

jobbigt mult. A^n
skriva om A m.h.a.

$$A\bar{x} = \lambda \bar{x}$$

(A kvadratisk)

Skriv om matrisen A så att

$A\bar{x} = \lambda \bar{x}$ — egenvärde till A.

egenvektor till A

- Hur hitta egenvärden λ, egenvektorer $\bar{x}$ till A?

$$A\bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}$$

$$A\bar{x} - \lambda\bar{x} = 0$$

$$(A - \lambda I)\bar{x} = 0 \qquad \underbrace{(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)}_{I}\bar{x} = (A-\lambda I)^{-1} \cdot 0$$

$$\bar{x} = 0$$

$\bar{x} = 0$ är ointressant, trivial lösning.
(unik) "

Andra lösningar då $\underline{\det(A - \lambda I) = 0}$

- $|A - \lambda I| = 0$ ger oändligt många lösning (parameterlösn.)

ex) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

$$(A - \lambda I)\bar{x} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \bar{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} \bar{X} = 0$$

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda) - 1 \cdot (-2) =$$

$$-3\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{(karaktäristisk - ekvation)}$$

$\vdots$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \text{egenvärden till } A.$$

forts.

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A\bar{x} = \lambda \bar{x}$

$(A - \lambda I)\bar{x} = 0 \quad (*)$

- $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\vdots$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Sök egenvektor till varje egenvärde.

- $\boxed{\lambda = 2}$ ins. i $(*)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sätt $y = t$

r.1 $x - 2t = 0$

$x = 2t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

egenvektor till A med egenvärdet 2.

$\lambda = 2$

$$A \cdot \bar{x} = 2 \cdot \bar{x}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2 \cdot \bar{x}}$$

$\boxed{\lambda = 1}$ ins. i $(*)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow \\ (-2) \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Sätt $y = t$

$x = t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

egenvektor till A med egenvärdet $\lambda = 1$

$$A^8 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = A^8 \cdot \bar{x} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ med $\lambda_1 = 2$

$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ med $\lambda_2 = 1$

$A^8 \bar{v} = \lambda^8 \cdot \bar{v}$ Gäller om $\bar{v}$ egenvektor

$A^8 \cdot \bar{v}_1 = 2^8 \cdot \bar{v}_1$

Uttryck $\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i egenvektorer.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{x} = a \cdot \overset{\bar{v}_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} + b \cdot \overset{\bar{v}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$A^8 \cdot \bar{x} = A^8 (-2 \cdot \bar{v}_1 + 3 \cdot \bar{v}_2)$$

$$= -2 \cdot \underline{A^8 \cdot \bar{v}_1} + 3 \cdot \underline{A^8 \cdot \bar{v}_2}$$

$$\left(\begin{aligned} A\bar{v}_1 &= \lambda_1 \cdot \bar{v}_1 \\ A\bar{v}_2 &= \lambda_2 \cdot \bar{v}_2 \end{aligned} \right)$$

$$= -2\ \underline{\lambda_1^8 \cdot \bar{v}_1} + 3 \cdot \underline{\lambda_2^8 \cdot \bar{v}_2}$$

$$= -2 \cdot 2^8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot 1^8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -512 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1021 \\ -509 \end{pmatrix}$$