$\boxed{F15}$ Partialbråksuppdelning forts.

Omskrivningar av trigonometriska funktioner och av rotuttryck.

Partialbråksuppdelning.

kvot av polynom

1) Täljaren lägre grad än nämnaren, annars polynomdivision
2) Faktorisera nämnaren så långt som möjligt i reella 1:a grads el. 2:a grads faktorer (x^2+1)

   Annars kvadratkomplettering

3) Ansats till partialbråk (PB)
4) Integrera . . .

Ansatser till partialbråk:

- $$\frac{cx+d}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

  Olika 1:a grads faktorer

  $A, B, C, \ldots$ konstanter som ska bestämmas

- "dubbelrot" $$\frac{cx^2+dx+e}{(x-a)\cdot(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2}$$

  OBS!

p.s.s. vid "trippelrot"

$$\frac{1}{(x+a)^3} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{(x+a)^2} + \frac{C}{(x+a)^3}$$

- $$\frac{dx^2+ex+f}{(x^2+ax+b)(x+c)} = \frac{Ax+B}{x^2+ax+b} + \frac{C}{x+c}$$

  grad 1, OBS!

  grad 2

  kan ej faktoriseras mer i reella heltal

Ex) $\int \frac{1}{x^3+2x^2+2x}\,dx$

faktorisera nämnaren

$x^3+2x^2+2x = 0$

$x(x^2+2x+2) = 0$

$x^2+2x+2 = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1-2}$

inga reella rötter

Ansats partialbråk:

$$\frac{1}{x\cdot(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$\frac{1}{x(x^2+2x+2)} = \frac{A(x^2+2x+2) + Bx^2 + Cx}{x(x^2+2x+2)}$$

samma nämnare

$$1 = Ax^2 + 2Ax + 2A + Bx^2 + Cx$$

$$1 = x^2(A+B) + x\cdot(2A+C) + 2A$$

Täljarna lika: Identifiera koeff.

	VL	=	HL
x^2:	0	$=$	$A+B$
x:	0	$=$	$2A + C$
konst:	1	$=$	$2A$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$B = -\frac{1}{2}$

$C = -1$

forts.

forts. Ins. $A = 1/2$, $B = -1/2$, $C = -1$ i ansatsen, ger

$$\int \frac{1}{x(x^2+2x+2)}\,dx = \int \frac{1/2}{x} + \frac{-\frac{1}{2}x - 1}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx}_{=\frac{1}{2}\ln|x|+C} \quad - \frac{1}{2}\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$$

kvadrat komplett. av nämnaren

$(x+1)^2+1$ (*)

nästan: $\boxed{\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)|+C}$

$I_3: \int \frac{\overbrace{2x+2}^{u'(x)}}{\underbrace{x^2+2x+2}_{=u(x)}}\,dx =$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x+2\cdot 2}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$\left\{\begin{array}{l} t = x^2+2x+2 \\ \frac{dt}{dx} = 2x+2 \\ dt = (2x+2)\,dx \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x+4-2+2}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$I_3 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C =$

$= \ln|x^2+2x+2|+C$

$$= -\frac{1}{4}\int\Big(\underbrace{\frac{2x+2}{x^2+2x+2}}_{I_3} + \frac{2}{x^2+2x+2}\Big)\,dx \quad (*)$$

$$-\frac{1}{4}\left(\ln|x^2+2x+2|\right) - \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$-\frac{1}{2}\arctan(x+1)+C$$

$$\therefore\ \underline{-\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x^2+2x+2| - \frac{1}{2}\arctan(x+1)+C}$$

Integration av Rotuttryck (kap 5.5)

Byt ut enkla (1:a ordn.) rotuttryck med variabelbyte.

$\sqrt{x+a}$ $t = \sqrt{x+a}$

ex) $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \left\{ t=\sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x-1,\quad x = t^2+1,\quad \frac{dx}{dt} = 2t,\quad dx = 2t\cdot dt \right\}$

$= \int \frac{1}{(t^2+1)\cdot t}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2}{t^2+1}\,dt$

$= 2\cdot \arctan(t) + C = \underline{2\arctan(\sqrt{x-1}) + C}$

2:a gradsuttryck i rotuttrycket:

omskrivning så roten försvinner.

$\sqrt{1-x^2}$ sätt $\boxed{x = \sin t}$

minus före kvadrat

$x^2 = \sin^2 t$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$

$\sqrt{1+x^2}$ sätt $\boxed{x = \tan t}$

plus kvadrat

$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\tan^2 t} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{|\cos t|}$

Omskrivning av

Trigonometriska uttryck (kap 5.4)

sin, cos med udda exponent => trig. ettan

" jämn " => dubbla vinkeln

---

ex) $\int \sin^5 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin^4 x \, dx$

$= \int \sin x \, (1 - \cos^2 x)^2 \, dx =$

$= \int \sin x \cdot (1 - 2 \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) \, dx$

$= \int \underbrace{\sin x}_{= -\cos x} - 2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos^4 x \, dx$

$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{t = \cos x} \\ dt = -\sin x \cdot dx \\ -dt = \sin x \, dx \end{array} \right\}$

$= -\cos x - 2 \int -t^2 \, dt + \int -t^4 \, dt$

$= -\cos x + 2 \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C$

$= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C$

Alt.

$\int [g(x)]^p \cdot g'(x) \, dx = g(x)^{p+1} + C \qquad p \neq -1$

$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln |g(x)| + C \qquad p = -1$