F2 Skalärprodukt + ortogonal projektion

Rep.)

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{-1\cdot\bar{e}_x}_{} + \underbrace{2\bar{e}_y}_{} + \underbrace{2\bar{e}_z}_{}$$

koordinater komposanter

Bestäm $\bar{v}$, om $\bar{v}$ är motriktad $\bar{u}$ och $\bar{v}$ har längd 5.

Längd u:

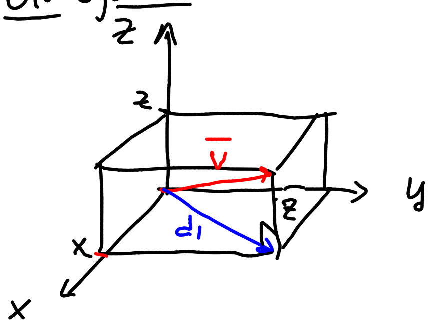
$$|\bar{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

Enhetsv. till $\bar{u}$:

$$\bar{e}_u = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{1}{|\bar{u}|}\cdot\bar{u} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = -5\bar{e}_u = -\frac{5}{3}\bar{u} = -\frac{5}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -10/3 \\ -10/3 \end{pmatrix}$$

ON-system:



$$\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad |\bar{v}|$$

$$\bar{d}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\bar{d}_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\bar{z}| = z$$

$$|\bar{d}_1|^2 + |\bar{z}|^2 = |\bar{v}|^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = |\bar{v}|^2$$

Om $\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ är längden: $\boxed{|\bar{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \|\bar{v}\|$

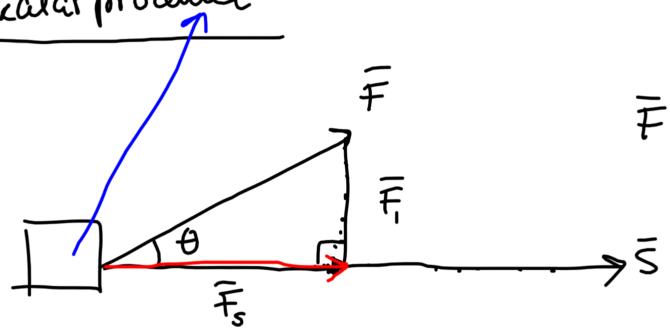
2 sätt att multiplicera vektorer.

1) skalärprodukt (dot product) : $\bar{a} \circ \bar{b}$, $\bar{a} \bullet \bar{b}$, $(\bar{a}, \bar{b})$, $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ ger ett <u>tal</u> (en <u>skalär</u>)

2) vektorprodukt (kryssprodukt) : $\bar{a} \times \bar{b}$ ger en ny vektor

---

<u>Skalärprodukt</u>



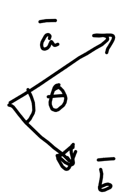
$$\bar{F} = \bar{F}_s + \bar{F}_1$$

$$\frac{|\bar{F}_s|}{|\bar{F}|} = \cos\theta \iff$$

$$\iff |\bar{F}_s| = |\bar{F}| \cdot \cos\theta$$

Fysikaliskt arbete: $W = |\bar{F}_s| \cdot |\bar{s}|$
$= \bar{F} \bullet \bar{s} = |\bar{F}| \cdot \cos\theta \cdot |\bar{s}|$

Allmänt: $\boxed{\bar{a} \circ \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\theta}$ där θ är vinkeln mellan $\bar{a}$ och $\bar{b}$



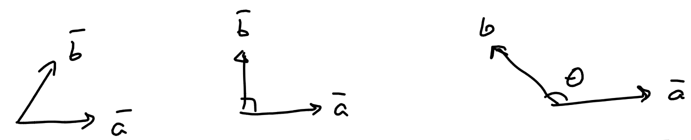
$0 \leq \theta \leq \pi$ $(180°)$

Allmänt: $\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\theta}$ där θ är vinkeln mellan $\bar{a}$ och $\bar{b}$

Om två vektorer är ortogonala, är vinkeln $\frac{\pi}{2}$ (90°) mellan dem.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \underbrace{\cos 90^\circ}_{=0} = 0$$

dvs. $\boxed{\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0}$



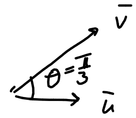
$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$

$\bar{a} \cdot \bar{b} > 0$ $\quad$ $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ $\quad$ $\bar{a} \cdot \bar{b} < 0$

$$\boxed{\bar{v} \cdot \bar{v} = |\bar{v}| \cdot |\bar{v}| \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} = |\bar{v}|^2}$$

Ex) $|\bar{u}| = 1$ $\quad$ vinkeln $\frac{\pi}{3}$ mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$

$|\bar{v}| = 2$



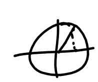
Sök talet a, så att: $3\bar{u} + 2\bar{v}$ ortogonal mot $2\bar{u} + a\bar{v}$

då är skalärprod. = 0.

$$(3\bar{u} + 2\bar{v}) \cdot (2\bar{u} + a\bar{v}) = 0$$

$$3\bar{u} \cdot 2\bar{u} + 3\bar{u} \cdot a\bar{v} + 2\bar{v} \cdot 2\bar{u} + 2\bar{v} \cdot a\bar{v} = 0$$

$$\underbrace{6\, \bar{u} \cdot \bar{u}}_{6 \cdot |\bar{u}|^2} + \underbrace{3a(\bar{u} \cdot \bar{v}) + 4 \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{u}}_{= \bar{u} \cdot \bar{v}}}_{(3a+4)\, \bar{u} \cdot \bar{v}} + \underbrace{2a(\bar{v} \cdot \bar{v})}_{2a \cdot |\bar{v}|^2} = 0$$



$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\theta = 1 \cdot 2 \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{3}}_{1/2} = 1$$

$$6 \cdot 1 + (3a+4) \cdot 1 + 2a \cdot 2^2 = 0$$

$$6 + 3a + 4 + 8a = 0$$

$$11a = -10$$

$$a = -10/11$$

Om $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\bar{a} \circ \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

summan är skalärprodukten

$$\begin{cases} \bar{a} \circ \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\theta \\ \bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{cases}$$

---

ex) $\bar{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Vad är vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$?

Skalärprodukt för att beräkna vinkeln.

$$\bar{u} \circ \bar{v} = \sqrt{2} \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\theta$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2 + 1^2} = 2$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+8} = 3$$

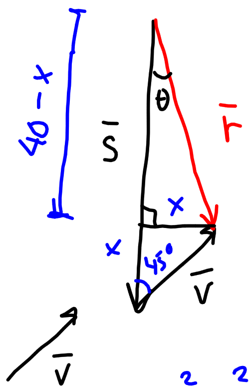
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\theta$$

$$3\sqrt{2} = 2 \cdot 3 \cdot \cos\theta \iff$$

$$\cos\theta = \frac{\cancel{3}\sqrt{2}}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

L. 1.2 b)



$|\bar{s}| = 40$ km/h

$|\bar{v}| = 10$ km/h

- $|\bar{r}| = ?$

- $\tan\theta = \frac{\text{mot}}{\text{när}} = \frac{x}{40-x}$

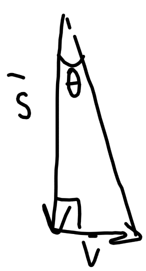
$x^2 + x^2 = 10^2$

$x = \sqrt{50}$

$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{50}}{40-\sqrt{50}}\right) \approx$

$= \tan^{-1}(\quad)$

a)



$|\bar{s}| = 40$ km/h

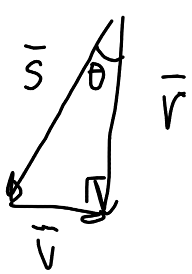
$|\bar{v}| = 10$ km/h

$|\bar{r}|^2 = 40^2 + 10^2$

fart: $|\bar{r}| = \sqrt{1700}$

$\tan\theta = \frac{|\bar{v}|}{|\bar{s}|} = \frac{10}{40}$

c)



$|\bar{s}| = 40$ km/h

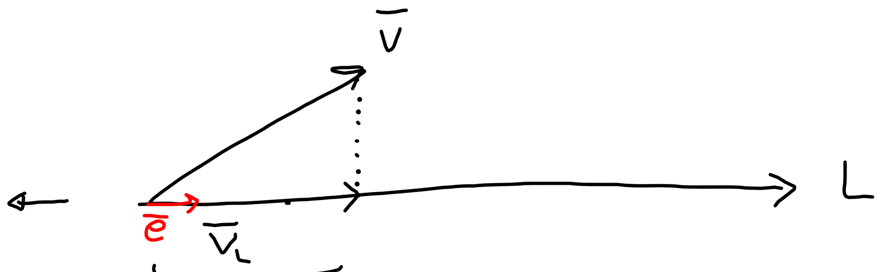
$|\bar{v}| = 10$ km/h

$40^2 = 10^2 + |\bar{r}|^2$

$\sqrt{1500} = |\bar{r}|$ fart

$\tan\theta = \frac{|\bar{v}|}{|\bar{r}|} = \frac{10}{\sqrt{1500}}$

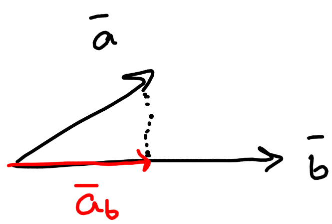
Vinkelrät (ortogonal) projektion



$\underbrace{\bar{v}_L}$ = projektionen av $\bar{v}$ på L $= t \cdot \bar{e}$

$t = \bar{v} \bullet \bar{e}$ ger storleken av projektionen. (med tecken)

$\bar{v}_L = (\underbrace{\bar{v} \cdot \bar{e}}_{t}) \cdot \bar{e}$ där $\bar{e}$ är en enhetsvektor i L's riktning



$\bar{a}_b$ = ortog. projektionen av $\bar{a}$ på $\bar{b}$.

$\bar{e}_b = \frac{1}{|\bar{b}|} \cdot \bar{b}$

$$\boxed{\bar{a}_b = \underbrace{(\bar{a} \cdot \bar{e}_b)}_{\text{storlek på proj.}} \bar{e}_b} = \left(\bar{a} \cdot \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}\right) \cdot \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

med tecken

ger riktning

$$= \underbrace{\left(\frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{b}| \cdot |\bar{b}|}\right)}_{\text{ett tal}} \cdot \bar{b} = \boxed{\frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\bar{b} \bullet \bar{b}} \, \bar{b}}$$

proj. vektorn av $\bar{a}$ på $\bar{b}$.

Tenta ex.
projektion:

$\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

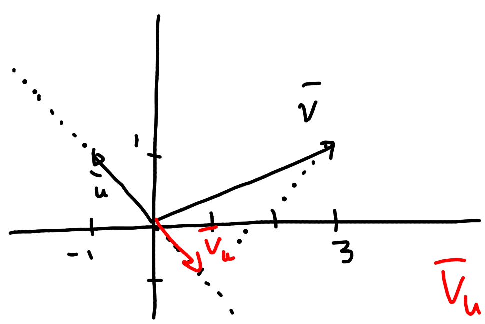
Bestäm projektionen av $\bar{v}$ på $\bar{u}$:

$$\bar{v}_u = (\bar{v} \cdot \bar{e}_u) \cdot \bar{e}_u = \left(\bar{v} \cdot \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right) \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$$

$$= \underbrace{\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{u}|}}_{\text{tal}} \cdot \bar{u} = \frac{3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2}} \cdot \bar{u}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \bar{u} = -\bar{u} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \bar{v}_u$$

är ortogonala proj. av $\bar{v}$ på u.



$\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

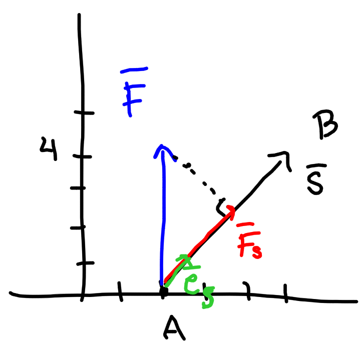
$\bar{v}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\bar{e}_x - 1\bar{e}_y$

Ex) Partikel rör sig från $A = (2,0,0)$ till $B = (5,4,0)$ under inverkan av kraften $\bar{F} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$

a) Bestäm sträckans längd

b) Fysikaliskt arbete $W = \bar{F} \bullet \bar{s}$

c) Kraftens komposant i förflyttningens riktning.



a) $\bar{s} = \overrightarrow{AB} = \text{"}B - A\text{"} = \begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$

$|\bar{s}| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = 5$

b) $W = \bar{F} \bullet \bar{s} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} =$

$= 0\cdot3 + 4\cdot4 + 0\cdot0 = 16 \text{ J}$

$$\bar{F}_s = \underbrace{(\bar{F} \bullet \bar{e}_s)}_{\text{ger storlek}} \bar{e}_s = \left(\bar{F} \bullet \frac{\bar{s}}{|\bar{s}|}\right) \cdot \frac{\bar{s}}{|\bar{s}|} = \frac{\bar{F} \bullet \bar{s}}{|\bar{s}|^2} \cdot \bar{s}$$

ger riktning

$$= \frac{\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}}{\underbrace{3^2+4^2+0}} \cdot \bar{s} = \frac{0\cdot3+4\cdot4+0\cdot0}{9+16} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{16}{25} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}48/25\\64/25\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}92\\2{,}56\\0\end{pmatrix} = \bar{F}_s$$

$\frac{16\cdot4}{25\cdot4} = \frac{64}{100}$