F3 Vektorprodukt

Rep) Bestäm vinkeln mellan vektorerna

$\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

- - -

Skalärprodukt : $\boxed{\bar{u} \circ \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos\theta}$

$\Leftrightarrow \boxed{\cos\theta = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|}}$

$\|\bar{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$\|\bar{v}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$

$$\cos\theta = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{6} \cdot 6} = \frac{-1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4}{6 \cdot \sqrt{6}}$$

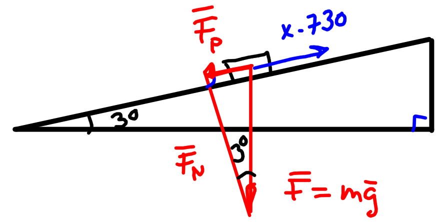
$$\cos\theta = \frac{10}{6 \cdot \sqrt{6}} = \frac{5}{3\sqrt{6}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{5}{3\sqrt{6}}\right) \approx 47{,}1^\circ$$

Ex) Pyramidbyggande

Ramp med 3° lutning

Stenblock 20 ton



- Varje person har dragkraften 730 N i rampens riktning
- Rampens friktion är försumbar

$\bar{F} = \bar{F}_P + \bar{F}_N$

$|\bar{F}| \approx 20000 \cdot 9,8$

Likformighet ger: $\frac{|\bar{F}_P|}{|\bar{F}|} = \frac{\text{mot.}}{\text{hyp}} = \sin 3°$

$|\bar{F}_P| = |\bar{F}| \cdot \sin 3° \approx 20000 \cdot 9{,}8 \cdot \sin 3° \approx 10258 \text{ N}$

Dragkraften måste vara större än $|\bar{F}_P|$

$x \cdot 730 \, [\text{N}] > 20000 \cdot 9{,}8 \cdot \sin 3° \, [\text{N}]$

$x > 14.1$

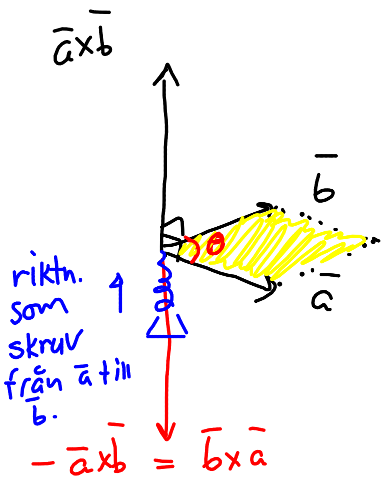
$x \geq 15$ pers.

Svar: Minst 15 pers. krävs.

Vektorprodukt (Kryssprodukt)

$\bar{a} \times \bar{b}$ är en ny vektor som är vinkelrät mot både $\bar{a}$ och $\bar{b}$

Finns bara i 3-dim, $\mathbb{R}^3$.



- $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\times\bar{b})$ är högerorienterad. (*)

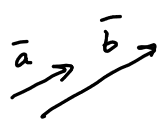
storlek av $\bar{a}\times\bar{b}$:

- $|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot \sin\theta$ (där θ är vinkeln mellan $\bar{a}$ och $\bar{b}$.)

även

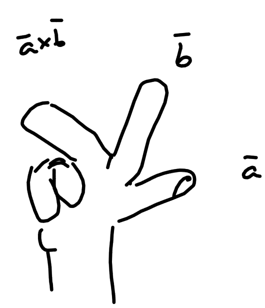
- $|\bar{a}\times\bar{b}| =$ area av parallellogram som $\bar{a}$ och $\bar{b}$ spänner upp

- $\bar{a}\times\bar{b}$ är vinkelrät mot både $\bar{a}$ och $\bar{b}$.



Om $\bar{a}\times\bar{b} = 0$ är $\bar{a}$ och $\bar{b}$ parallella.
(ingen vridning, skruvning)

(*) tänk högerhand:
där $\bar{a}$ är tumme
$\bar{b}$ = pekfinger
$\bar{a}\times\bar{b}$ = framvikt långfinger.



Beräkna vektorprodukten:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\bar{a} \times \bar{b} =$ {Sarrus regel, metod att bl.a beräkna $\bar{a} \times \bar{b}$}

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left| \begin{matrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}$$

$$= \bar{e}_x \cdot a_2 \cdot b_3 + \bar{e}_y a_3 b_1 + \bar{e}_z a_1 b_2 - b_1 a_2 \bar{e}_z - b_2 a_3 \bar{e}_x - b_3 a_1 \bar{e}_y$$

$$= \bar{e}_x (a_2 b_3 - b_2 a_3) + \bar{e}_y (a_3 b_1 - b_3 a_1) + \bar{e}_z (a_1 b_2 - b_1 a_2).$$

$$= \begin{bmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{bmatrix}$$ är koordinaterna till $\bar{a} \times \bar{b}$.

Lär dig metoden, inte resultatet.

Ex) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beräkna $\bar{a} \times \bar{b}$.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z & \bar{e}_x & \bar{e}_y \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right.$$

$$= 6\bar{e}_x + 1\bar{e}_y + 2\bar{e}_z - 3\bar{e}_z - 1\bar{e}_x - 4\bar{e}_y$$

$$= 5\bar{e}_x - 3\bar{e}_y - \bar{e}_z = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \bar{a} \times \bar{b}.$$

Koll att $\bar{a} \times \bar{b} \perp \bar{a}$. $\iff$ skalärprod. $= 0$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 10 - 9 - 1 = 0 \quad \text{Ja!}$$

$\bar{b} \perp \bar{a} \times \bar{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) = 5 - 3 - 2 = 0$$

Ja!

Alt. metod: $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$

$\underline{\text{x-koord}}$: håll för x-koordinaterna och "kryssa" de andra. $\Rightarrow a_2 b_3 - a_3 b_1$

... fortsätt $\overset{\text{nedåt}}{\text{med}}$ övriga koord ....

=

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \cdot 2) - (1 \cdot 1) \\ (1 \cdot 1) - (2 \cdot 2) \\ (2 \cdot 1) - (3 \cdot 1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 - 1 \\ 1 - 4 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ex) $\bar{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \bar{v} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot5-2\cdot4\\2\cdot3-0\cdot5\\0\cdot4-1\cdot3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}0 & 3\\1 & 4\end{matrix}$$

koll

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \end{array}$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix}\bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z\\0 & 1 & 2\\3 & 4 & 5\end{vmatrix}\begin{matrix}\bar{e}_x & \bar{e}_y\\0 & 1\\3 & 4\end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc} - & - & - \end{array}$$

$$= 5\bar{e}_x + 6\bar{e}_y + 0\cancel{\bar{e}_z} - 3\bar{e}_z - 8\bar{e}_x - 0\bar{e}_y$$

$$= \begin{pmatrix}5-8\\6\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

koll:

$$\bar{u} \bullet (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = 0\cdot(-3) + 1\cdot6 + 2\cdot(-3) = 0$$ Ja!

Om skalärprod. $= 0$ är vektorerna vinkelräta

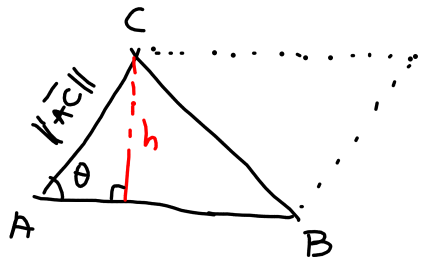
$$\bar{v} \times \bar{u} = -\bar{u} \times \bar{v} = \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$$

Area av triangel?

$A = (1,1,0)$

$B = (3,0,2)$

$C = (0,-1,1)$



trig.

$$\frac{h}{\|\vec{AC}\|} = \sin\theta$$

$$\vec{AB} = \text{"}B-A\text{"} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \text{"}C-A\text{"} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{Arean} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \sin\theta}{2} = \frac{\|\bar{AB} \times \bar{AC}\|}{2}$$

$$\bar{AB} \times \bar{AC} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z & \bar{e}_x & \bar{e}_y \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right| = -\bar{e}_x - 2\bar{e}_y - 4\bar{e}_z - \bar{e}_z + 4\bar{e}_x - 2\bar{e}_y$$

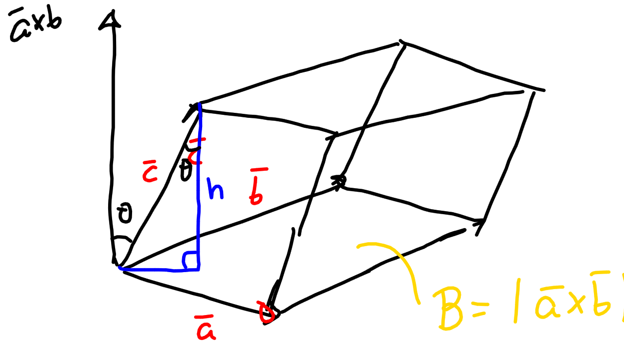
$$= \begin{pmatrix}3\\-4\\-5\end{pmatrix}$$

$$\|\bar{AB} \times \bar{AC}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$$

Sökt area av triangeln: $\frac{\sqrt{50}}{2} = \underline{\underline{\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}}}$ a.e.

Volym av parallellepiped?



$$\text{Volym} = \underset{\sim}{B}\cdot h$$
$$= |\bar{a}\times\bar{b}|\cdot h$$

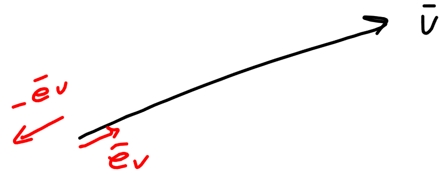
$$\frac{\text{när}}{\text{hyp}} = \cos\theta = \frac{h}{|\bar{c}|}$$

$$h = |\bar{c}|\cdot\cos\theta$$

$$V = |\bar{a}\times\bar{b}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos\theta$$
$$= \left|(\bar{a}\times\bar{b})\bullet\bar{c}\right|$$

L. 1.15)

b) $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \|\bar{v}\| = \sqrt{22}$



$$\bar{e}_v = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{22} \\ -3/\sqrt{22} \\ 2/\sqrt{22} \end{pmatrix}$$

även $- \begin{pmatrix} 3/\sqrt{22} \\ -3/\sqrt{22} \\ 2/\sqrt{22} \end{pmatrix}$

$$|\bar{e}_v| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{22}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{22}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{22}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{22} + \frac{9}{22} + \frac{4}{22}} = \sqrt{\frac{22}{22}} = 1$$

— — — .

L. 1.4) c) $\|3\bar{u} + 4\bar{v}\| = d$ $\qquad \|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| = 1$, med vinkeln $\pi/3$.

$\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0$

$\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$

$$d^2 = \|3\bar{u} + 4\bar{v}\|^2 = (3\bar{u} + 4\bar{v}) \cdot (3\bar{u} + 4\bar{v})$$

$$= 3\bar{u} \cdot 3\bar{u} + 3\bar{u} \cdot 4\bar{v} + 4\bar{v} \cdot 3\bar{u} + 4\bar{v} \cdot 4\bar{v}$$

b)

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{u} \cdot \bar{v} &= |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\tfrac{\pi}{3} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} \end{aligned}}$$

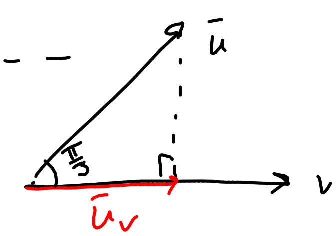
$$= 9 \cdot \underbrace{|\bar{u}|^2}_{1} + 24 \underbrace{\bar{u} \cdot \bar{v}}_{= \frac{1}{2}} + 16 \underbrace{|\bar{v}|^2}_{1}$$

$$= 9 + 12 + 16 = 37 = d^2$$

$\therefore d = \sqrt{37}$.

— — —

d)



Projektionen av $\bar{u}$ på v:

$$\bar{u}_v = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{v} \cdot \bar{v}} \bar{v} = \left(\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}| \cdot |\bar{v}|}\right) \bar{v}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{|\bar{v}|^2} \cdot \bar{v} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot 1} \bar{v} = \frac{1}{2} \bar{v}.$$