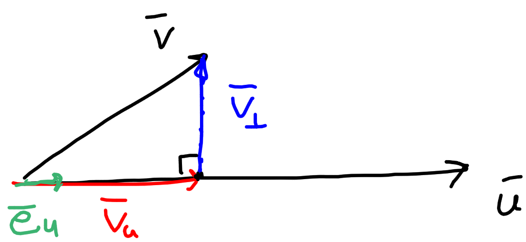
$\boxed{F4}$ Linjens- och planets ekvation

Rep.) $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\bar{v} = \bar{v}_u + \bar{v}_\perp$

$\bar{v}$ uppdelad i två ortogonala komposanter.



ortogonal projektion av $\bar{v}$ på $\bar{u}$.

enhetsvektor till $\bar{u}$:

$$\bar{e}_u = \frac{1}{|\bar{u}|} \cdot \bar{u}$$

- $\bar{v}_u$ = proj. av $\bar{v}$ på $\bar{u}$ $= \underbrace{(\bar{v} \bullet \bar{e}_u)}_{\text{ger stl. av proj. (med tecken)}} \cdot \bar{e}_u$ ← ger riktning

$$= \left(\bar{v} \bullet \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right) \cdot \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \underbrace{\frac{\bar{v} \circ \bar{u}}{\bar{u} \bullet \bar{u}}}_{\text{tal}} \bar{u} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \cdot \bar{u}$$

$$= \frac{3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_\perp = \bar{v} - \bar{v}_u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{9}{9} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 27 - 1 \\ 0 - 2 \\ -9 - 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 26 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

koll: $\bar{v}_\perp + \bar{v}_u = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 26 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 26+1 \\ -2+2 \\ -11+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 27 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

OK

Rep.) <u>Skalärprod</u>:

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\theta}$$ där θ är vinkeln mellan $\bar{a}$ och $\bar{b}$.

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

summan

ger: $\cos\theta = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$

- används för att beräkna <u>vinkeln</u> mellan vektorer.
- fysikaliskt arb. mm.

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \iff \bar{a} \perp \bar{b}}$$

Skalärprod. mellan två vinkelräta vektorer är alltid 0.

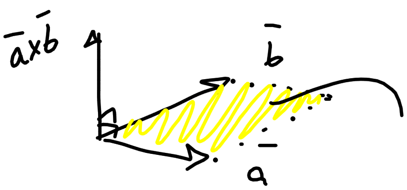
<u>Vektorprodukt</u>: $\bar{a} \times \bar{b}$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left|\begin{matrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2(-1) \\ -1 - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

alt.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

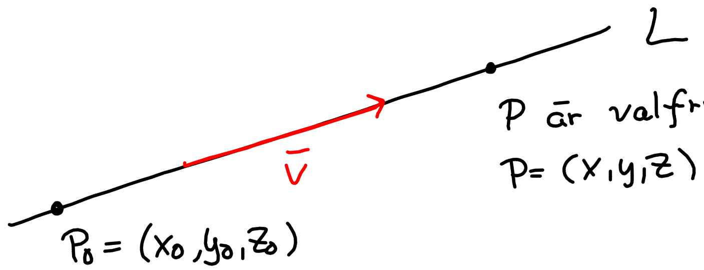
$$\begin{matrix} 3 & & 1 \end{matrix}$$



arean $= |\bar{a} \times \bar{b}|$ av parallellogram.

Linjens ekvation.

- riktningsvektor $\bar{v}$, parallell med linjen. $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$
- punkt på linjen. $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$



P är valfri punkt på linjen

$P = (x, y, z)$

$\overrightarrow{P_0P}$ är parallell med $\bar{v}$, dvs:

$\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \bar{v}$ där $t \in \mathbb{R}$

t kallas parameter.

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} = $ "B − A" = slutp. − startp.

$= \overline{OB} - \overline{OA}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

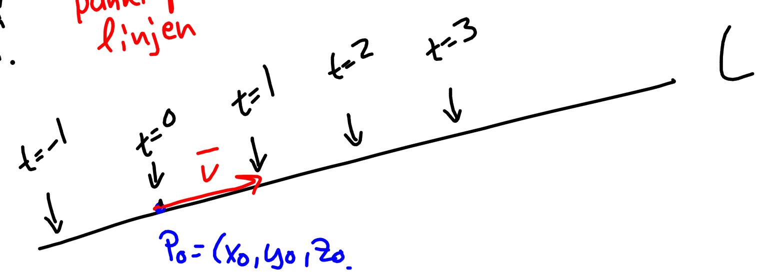
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases}}$$

Linjens ekvation på parameterform. $t \in \mathbb{R}$

koordinaterna för alla punkter på linjen.

känd punkt på linjen

riktningsvektor till linjen.



Ex) Bestäm ekvationen på parameterform för linjen mellan punkterna

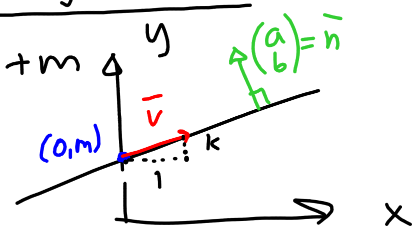
$A = (1,2,-1)$ och $B = (0,2,3)$

rikt.vektor till linjen: $\overrightarrow{AB} = "B-A" = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$

Svar: $L: \begin{cases} x = 1 + t\cdot(-1) \\ y = 2 + t\cdot 0 \\ z = -1 + t\cdot 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

ger alla punkter på linjen — punkt på linjen — $\overline{AB}$

i 2D: $\mathbb{R}^2$ $\quad y = kx + m$



$\bar{v} = \begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}$

$\boxed{L: \begin{cases} x = 0 + 1\cdot t \\ y = m + k\cdot t \end{cases}}$ är linjens ekv. på parameterform i $\mathbb{R}^2$.

$y - kx - m = 0$

$-kx + y - m = 0$

$\boxed{ax + by + c = 0}$ Linjens ekv. på normalform. i $\mathbb{R}^2$.

$\bar{n} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ är vinkelrät vektor mot linjen

\- - -

$y = kx + m \iff -kx + y - m = 0$

$\bar{v} = \begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}$ riktn.vektor till linjen. $\quad \bar{n} = \begin{pmatrix}-k\\1\end{pmatrix}$ är normalvektor vinkelrät mot linjen.

koll: $\bar{v} \cdot \bar{n} = 0$

$\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-k\\1\end{pmatrix} = 1\cdot(-k) + k\cdot 1 = 0$ Ja $\bar{v} \perp \bar{n}$

$$* \quad L: \begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases}$$

Linjens elv. på parameterform

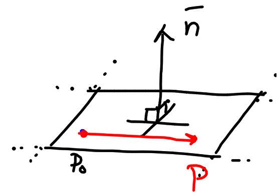
Løs ut t:

$$\boxed{(t =) \ \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}}$$

Linjens elv. på parameterfri-form.

Ekvationen för ett plan

- normalvektor till planet : $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$
- punkt i planet : $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$



- - - - -

$P = (x, y, z)$ är valfri punkt i planet, om

$\overrightarrow{P_0P}$ är vinkelrät mot $\bar{n}$; dvs :

$$\overline{P_0P} \bullet \bar{n} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{A(x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0}$$

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_{= D} = 0$$

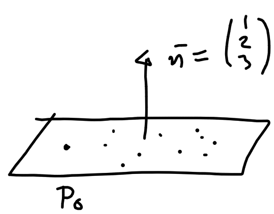
$$(*) \quad \boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

planets ekv. på normalform.

Ex) $\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $P_0 = (4, -5, 0)$ punkt i planet

normalvektor till planet

$$(*) \quad 1 \cdot x + 2y + 3z + D = 0$$



$P_0 \in$ planet . insättes

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 0 + D = 0$$
$$4 - 10 + D = 0$$
$$D = 6$$

Svar: ∴ $x + 2y + 3z + 6 = 0$ är planets ekv.

$(0, 0, -2)$ är en punkt i planet. fy $0 + 2 \cdot 0 + 3(-2) + 6 = 0$

$(-6, 0, 0)$ " " "

$(-1, -1, -1)$ " " " fy $-1 + 2(-1) + 3(-1) + 6 = 0$ ok!

Ex) Bestäm ekv. för planet genom

$P_0 = (-1,2,1)$

$R = (0,6,3)$

$Q = (1,1,4)$

a) parameterform

b) parameterfri form

\- - - - -

Planets ekvation på parameterform:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 + s \cdot w_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 + s \cdot w_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 + s \cdot w_2 \end{cases}$$

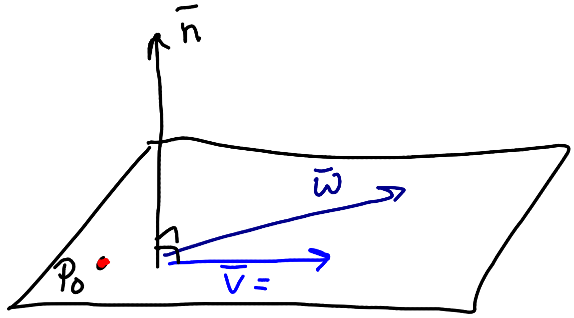
där t och s är parametrar $t, s \in \mathbb{R}$.

alla pkt. i planet.

punkt i planet

två linjärt ober. vektorer parallella med planet

där $\bar{n} = \bar{v} \times \bar{w}$



$\bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$