$\boxed{F5}$ Avstånd

Rep.) Bestäm ekv. för planet Π genom

punkterna: $P_0 = (-1,2,1)$

$R = (0,6,3)$

$Q = (1,1,4)$

$$\overline{P_0R} = \begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$$

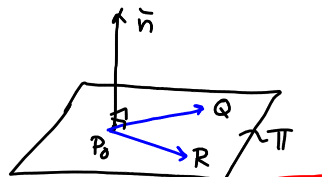
$$\overrightarrow{P_0Q} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

vektorer parallella med planet.

a) parameterform:
$$\Pi: \begin{cases} x = -1 + t\cdot 1 + s\cdot 2 \\ y = 2 + t\cdot 4 + s\cdot(-1) \\ z = 1 + t\cdot 2 + s\cdot 3 \end{cases}$$
$t, s \in \mathbb{R}$ parametrar

b) parameterfri form:

$$\bar{n} = \underset{1}{\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}} \times \underset{2}{\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}4\cdot 3 - 2\cdot(-1)\\ 2\cdot 2 - 1\cdot 3\\ 1\cdot(-1) - 4\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\1\\-9\end{pmatrix}$$



$14x + y - 9z + D = 0$

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{där } \bar{n} = \begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}}$$
Planets ekv.

Ins. t.ex $Q = (1,1,4)$ ger

$14\cdot 1 + 1 - 9\cdot 4 + D = 0 \iff D = 21$ $\therefore$ $\underline{14x + y - 9z + 21 = 0}$ SVAR

Planets ekvation på parameterform:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cdot v_1 + s\cdot w_1 \\ y = y_0 + t\cdot v_2 + s\cdot w_2 \\ z = z_0 + t\cdot v_3 + s\cdot w_3 \end{cases}$$

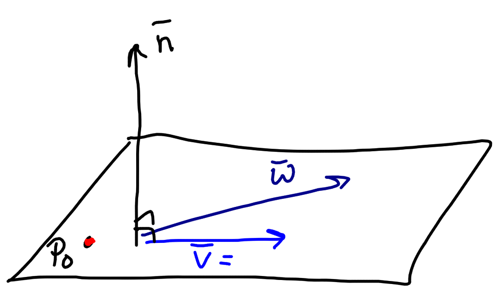
där t och s är parametrar $t, s \in \mathbb{R}$.

alla pkt. i planet.

punkt i planet

två linjärt ober. vektorer parallella med planet

där $\bar{n} = \bar{v} \times \bar{w}$



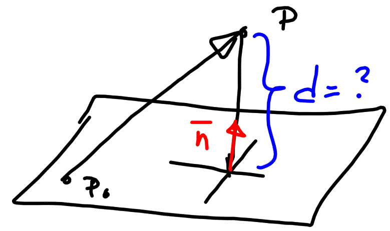
$$\bar{w} = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

Avstånd:

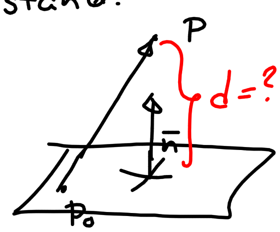
$\boxed{\text{punkt - plan}}$

P given punkt.



- Hitta punkt i planet P_0
- Bilda $\overline{P_0P}$
- projicera $\overline{P_0P}$ på $\bar{n}$

$$d = \left| \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} \right|$$ är sökt avstånd.



ex) $P = (1,0,0)$

plan: Π: $x + y - z = 0$

Bestäm kortaste avståndet mellan punkten P och planet Π.

$\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad |\bar{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

Punkt i planet: t.ex $P_0 = (0,0,0)$

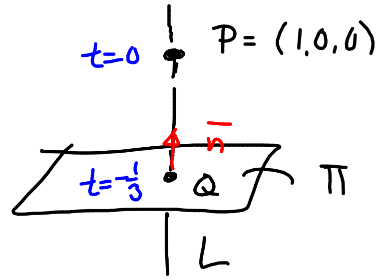
- $\overline{P_0P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- proj av $\overline{P_0P}$ på $\bar{n}$:

$$d = \left| \underbrace{\left(\frac{\overline{P_0P} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} \right)}_{\substack{(\pm)\text{ storlek} \\ \text{av proj}}} \cancel{\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} \right|$$

ger riktning (behövs inte här)

$$= \left| \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{3}} \right| = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

Alt: $\boxed{\text{punkt - plan}}$



ex) $P=(1,0,0)$

$\Pi: x+y-z=0 \qquad \bar{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

- Bilda linjen L genom P vinkelrätt mot planet.
  L har $\bar{n}$ som riktn. vektor

$$L: \begin{cases} x = 1 + t\cdot 1 \\ y = 0 + t\cdot 1 \\ z = 0 + t\cdot(-1) \end{cases}$$

där $\bar{n}$ = planets normalvektor

- Skärningspunkt mellan linjen och planet ger Q
- Sökt avst. $d = |\overline{PQ}| = |t\cdot\bar{n}|$

Ins. L i planet : $(1+t)+(0+t)-(0+t(-1))=0$

$$1+t+t+t=0$$
$$3t=-1$$
$$\underline{t=-1/3.}$$

då $t=-1/3$ skär linjen planet.

Sökt avst $d=|t\cdot\bar{n}| = \left|-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\right| = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$

eller: Ins. $t=-1/3$ i L ger $Q: \begin{cases} x= 1-1/3 \\ y= -1/3 \\ z= -(-1/3) \end{cases} = \left(1-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

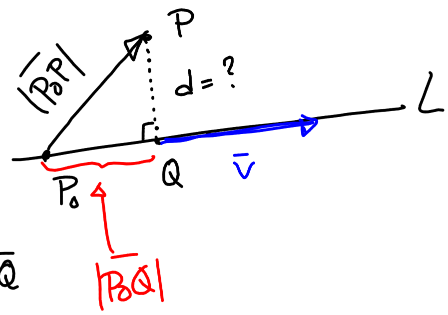
$$=\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

$$\overline{PQ} = \begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$d = |\overline{PQ}| = \frac{1}{3}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Avst. $\boxed{\text{Punkt – Linje}}$



- Välj en punkt på L : P_0
- $\overline{P_0P}$, $|\overline{P_0P}|$
- proj av $\overline{P_0P}$ på L ger $\overline{P_0Q}$
- Pythagoras sats ger d :

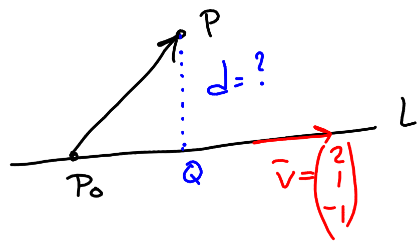
$$d^2 + |\overline{P_0Q}|^2 = |\overline{P_0P}|^2$$

$$d = \sqrt{|\overline{P_0P}|^2 - |\overline{P_0Q}|^2}$$

- - - - -

Ex) tenta jan-13. (5p)

Avståndet mellan $P = (-1,0,3)$ och $L : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = t \\ z = -1-t \end{cases}$



- $P_0 = (3,0,-1) \in L$
- $\overline{P_0P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|\overline{P_0P}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2} = 4\cdot\sqrt{2}$$

- proj av $\overline{P_0P}$ på L ger $\overline{P_0Q}$.

$$|\overline{P_0Q}| = \underbrace{\left| \frac{\overline{P_0P} \bullet \bar{v}}{|\bar{v}|} \right|}_{\text{storlek av proj. på linjen}} = \left| \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} \right| = \left| \frac{-4\cdot 2 + 0\cdot 1 + 4\cdot(-1)}{\sqrt{6}} \right| = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{2\cdot 6}{\sqrt{6}} = 2\cdot\sqrt{6}$$

- Pythagoras ger d :

$$d^2 + \left(\frac{12}{\sqrt{6}}\right)^2 = (4\cdot\sqrt{2})^2$$

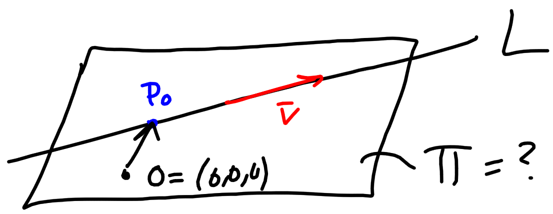
$$d^2 + \frac{144}{6} = 16\cdot 2$$

$$d = \sqrt{32 - 24} = \underline{\sqrt{8}}$$

Sökt avst.

L:1.23

Origo : $O=(0,0,0) \in$ planet.



$L: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+2t \\ z = 3+3t \end{cases} \in$ planet.

$P_0 = (2,2,3) \in L \in \Pi$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ parallell med planet.

$\overline{OP_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ parallell med Π

$$\bar{n} = \overline{OP_0} \times \bar{v} = \left| \begin{matrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 - 2\cdot 3 \\ 3\cdot 1 - 3\cdot 2 \\ 2\cdot 2 - 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$0\cdot x - 3\cdot y + 2z + D = 0$$

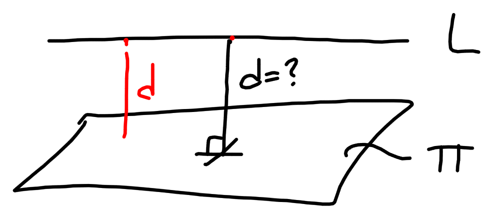
ins en punkt i planet ger D. $\quad 0 - 3\cdot 0 + 2\cdot 0 + D = 0$

$D = 0$

$\therefore \quad -3y + 2z = 0$ planets ekvation

(innehåller x-axeln)

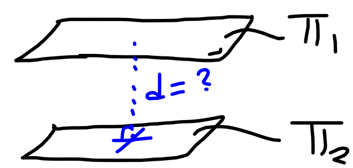
Avst. $\boxed{\text{Linje - Plan}}$



L och π är parallella
(annars blir avst. 0)

- Välj en punkt på linjen och bestäm kortaste avst. med metoden <u>punkt – plan</u>

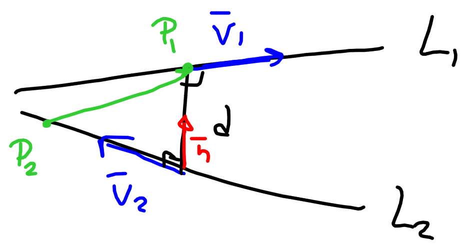
Avst. $\boxed{\text{Plan – Plan}}$



Planen måste vara parallella
annars är avst. 0.

- Välj valfri punkt i plan π_1 och bestäm avstånd till plan π_2 som ovan <u>punkt-plan</u>

Avst. $\boxed{\text{Linje – Linje}}$



- $\bar{n} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ är vinkelrät mot båda linjernas riktningsvektorer $\bar{v}_1$ resp. $\bar{v}_2$.

Sökt avst $d = |t \cdot \bar{n}|$

- Välj en punkt från vardera linje, t.ex P_1 och P_2
- Bilda $\overline{P_1P_2}$ och projicera på $\bar{n}$

$$d = \left| \frac{\overline{P_1P_2} \bullet \bar{n}}{|\bar{n}|} \right|$$ är sökt avstånd.

Ex) $L_1: \begin{cases} x = -1 - 2t_1 \\ y = -3 - t_1 \\ z = t_1 \end{cases}$ $\qquad$ $L_2: \begin{cases} x = 4 + t_2 \\ y = 2 + 5t_2 \\ z = 3 + t_2 \end{cases}$

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{n} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \left| \begin{array}{ccc|cc} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z & \bar{e}_x & \bar{e}_y \\ -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right. = \begin{pmatrix} -1\cdot 1 - 5\cdot 1 \\ 1\cdot 1 - 1\cdot(-2) \\ -2\cdot 5 - 1\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{-\bar{e}_x} + \underbrace{\bar{e}_y} - \underline{\underline{10\bar{e}_z}} - \underline{\underline{(-1)\bar{e}_z}} - \underbrace{5\bar{e}_x} - \underbrace{(-2)\bar{e}_y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\bar{n} = -3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{= \bar{n}_1}$

$P_1 = (-1, -3, 0) \in L_1$ $\qquad$ $P_2 = (4, 2, 3) \in L_2$

$\overline{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$

- proj av $\overline{P_1P_2}$ på $\bar{n}$ ger d.

$$d = \left| \overline{P_1P_2} \bullet \frac{\bar{n}_1}{|\bar{n}_1|} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} \right| = \left| \frac{10 - 5 + 9}{\sqrt{14}} \right| = \underline{\underline{\sqrt{14}}}$$