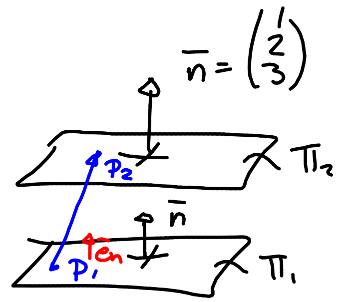
$\boxed{F6}$ Matriser

Rep. Avståndet mellan planen

$\Pi_1: \quad x + 2y + 3z + 4 = 0$

$\Pi_2: \quad x + 2y + 3z + 1 = 0$

- - - -



parallella plan.

Välj t.ex $P_1 = (-1, 0, -1) \in \Pi_1$

$P_2 = (-1, 0, 0) \in \Pi_2$

Godtyckliga punkter i vardera plan

• $\overline{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

vektor mellan planen

$$d = \left\{ \overbrace{\text{proj}}^{\text{storlek av}} \text{ av } \overline{P_1P_2} \text{ på } \bar{n} \right\}$$

$$= \left| \frac{\overline{P_1P_2} \bullet \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \right| = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

Matriser :

Matrisens typ (storlek) : $r \times k$

Ange alltid raderna först, kolumner sen.

r = antal rader i matrisen

k = " kolumner -"-

$$\begin{array}{l} \\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & \dots & a_{2k} \\ & \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & & & a_{rk} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{rader} \\ \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{array} \end{array}$$

kolumner (kolonner)

a_{ij} elementet på rad i kolumn j i matrisen A

- Enhetsmatris = Identitetsmatris = E = I
  Kvadratisk matris med 1:or i huvuddiagonalen 0:or för övrigt.

elementet $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$

t.ex $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$

av ordn. 4

- Transponatet av en matris A^T
  Rad m i matris A = Kolumn m i $A^T = A^t = (A')$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Rad 1 i A blir kol 1 i A^T osv.

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\bar{x}^T = (x_1 \; x_2 \; x_3)$

element $a_{ij}^T = a_{ji}$

$$\boxed{(A^T)^T = A}$$

- Symmetrisk matris : $A^T = A$
  kvadratisk matris som speglas i huvuddiagonalen

t.ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Addera matriser - av samma typ $r \times k$

$$U + L = \underset{3\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}} + \underset{3\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 4}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 5 & 3 \\ 8 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix}}$$

Mult. matris med tal (skalär) - Skalning

$$3 \cdot U = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Varje element multipliceras med talet.

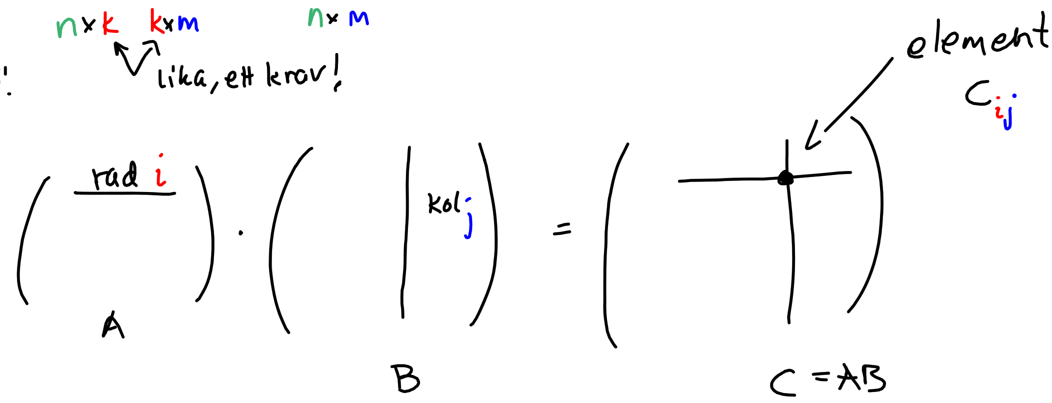
Subtraktion :

$$A - B = A + (-1) \cdot B$$

Matrismultiplikation

$$A \cdot B = AB$$
$$n \times k \quad k \times m \qquad n \times m$$

OBS! lika, ett krav!



C=AB

Element c_{ij} på rad i, kol j fås genom termvis mult. (skalärprodukt) av rad i, i A med kol j i B.

Mult. alltid raden i första matrisen med kolumner i andra matrisen.

ex) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$\underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 2}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} =$$

lika OK!

$$= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

2×2

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 3\cdot 6 & 5\cdot 2 + 6\cdot 4 \\ 7\cdot 1 + 8\cdot 3 & 7\cdot 2 + 8\cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

- $\boxed{AB \neq BA}$ oftast.

Ex) $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad E = I_2$

$D = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$CF = \underset{1\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{1\times 2}{\begin{pmatrix} 5\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 5\cdot 1 + (-1)\cdot 1 \end{pmatrix}} = \underset{1\times 2}{\begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}}$$

ok

$$FC = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{1\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}} = \text{går ej.}$$

ej lika

$$FC^T = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 5 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

lika ok

$$CD = \underset{1\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix} = \underset{1\times 1}{\begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}}$$

ok

$$DC = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{1\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1\cdot 5 & -1\cdot(-1) \\ 0\cdot 5 & 0\cdot -1 \end{pmatrix} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

ok

$$FE = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = F$$

Mult. med identitetsmatrisen ändrar inget.

- Invers matris A^{-1}

Kvadratiska matriser kan ha en invers matris

så att: $A \cdot A^{-1} = I$

$$A^{-1} \cdot A = I$$

Division mellan matriser existerar ej.

Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

till 2x2 matriser blir inversen:

$$A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{a \cdot d - c \cdot b}}_{} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Regeln gäller endast 2x2-matriser.

= determinaten till A = det A =

där $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$

det A är ett tal

ex) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4/2 & -\cancel{2}/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

koll: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{\text{ok!}}$