$\boxed{F7}$ Linjära ekvationssystem
Gausselimination (kap 5.1 - 5.3.1)

Rep: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ har invers: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

där $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$

Om determinanten är noll, saknas invers.

A 3x3 matris

Sarrusregel (Gäller bara 3x3 matriser)

$$\det A = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$$

Ekvationssystem:

$$\begin{cases} x + y = 1 & (\text{I}) \\ -x + y = -2 & (\text{II}) \end{cases}$$

Sök x och y som uppfyller båda ekvationerna.

- Substitutionsmetoden:

Lös ut t.ex x ur (I) och sätt in i (II).

$x = 1 - y$ ins i II:

$-(1-y) + y = -2$ ger $y = -\frac{1}{2}$

$x = 1 - y = \frac{3}{2}$.

- Additionsmetoden:

$$\begin{cases} x + y = 1 & \text{I} \\ -x + y = -2 & \text{II} \end{cases}$$

$+$

I+II: $0 + 2y = -1$

$y = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} x + y = 1 & \text{I} \\ -5x + 5y = -10 & \text{II} \end{cases}$$

ger samma lösn.

$5 \cdot \text{I} + \text{II}$

forts.

- Matrisform

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = -2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}}_{\text{koefficient-matris}} \cdot \overset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underbrace{\overset{B}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}}_{\text{högerleds-vektor}}$$

$$\boxed{AX = B}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot x + 1\cdot y \\ -1\cdot x + 1\cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = B$$

2x2 2x1

Bestäm X

Mult. med A^{-1} från vänster.

$$AX = B$$

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I} X = A^{-1}\cdot B$$

$$\underbrace{I\cdot X} = A^{-1}\cdot B$$

$$\underbrace{X = A^{-1}\cdot B}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 1 - (-1)\cdot 1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) \\ 1\cdot 1 + 1\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Ekvationssystem har antingen:

- precis en lösning (entydig lösning) $\det A \neq 0$
- ingen lösning $\det A = 0$
- oändligt många lösningar $\det A = 0$

Gausselimination:

Systematisk, effektiv metod att lösa ekvationssystem:

- Skriv om ekv.system till övertriangulär form / trappstegsform

med elementära radoperationer. (sid 151) ändrar inte lösningen

1. Byta plats på rader
2. Mult. rad med ett tal ($\neq 0$).
3. Addera en multipel av en rad till en annan.

- Efter trappstegsform löses ekv. systemet med bakåtsubstitution

---

ex)
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

I matrisform:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Skriv som totalmatris: $(A|B)$
(utvidgad matris, augmented matrix)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} (-1) \quad (-1) \\ -1 \cdot r_1 + r_2 \\ -1 \cdot r_1 + r_3 \end{array} \sim$$

rad ekvivalens. (ger samma lösning).

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Bakåt substitution ger:

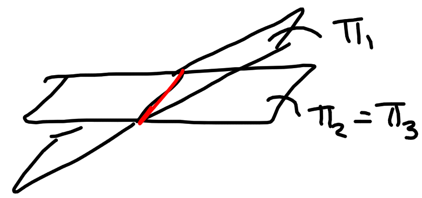
rad 3: $1z = 0 \Leftrightarrow z = 0$

rad 2: $y + 2z = 3$
$y = 3 - 2\cdot 0 = 3$

rad: $x + 3 + 0 = 1$
$x = 1 - 3 = -2$

Svar: $(x, y, z) = (-2, 3, 0)$

ex2) $\begin{cases} y + 2z = 3 & \pi_1 \\ x + y + z = 1 & \pi_2 \\ -2x - 2y - 2z = -2 & \pi_3 \end{cases}$



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right) \quad 2\cdot r_1 + r_3$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

pivot element - första elementet i varje rad, med nollor till vänster och under sig

$0 \cdot z = 0$

z är fri variabel

Sätt: $z = t$

rad 2: $y + 2t = 3$

$y = 3 - 2t$

rad 1: $x + y + z = 1$

$= 1 - (3 - 2t) - t$

$= -2 + t$

Svar:

$L: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}$

Alla punkter på linjen är lösningar

∴ oändligt många lösningar.

parameterlösning.

ex 3) $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ -x - y - z = 2 \end{cases}$

Totalmatris:

radbyte

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2) & (1) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

går ej!

$0x + 0y + 0z = 5$ går ej

Lösning saknas!

tenta ex)

Bestäm X ur matrisekvationen om A, B har inverser.

$$AXB = AB + A^2$$

Mult. med A^{-1} från vänster

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}XB = A^{-1}(AB + A^2)$$

$$IXB = \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot B + \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot A$$

$$XB = B + A$$

Mult. med B^{-1} fr. höger

$$X\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I} = (B + A)\cdot B^{-1}$$

$$\underbrace{X\cdot I} = \underbrace{B\cdot B^{-1}} + A\cdot B^{-1}$$

$$\underline{X = I + A\cdot B^{-1}}$$