$\boxed{F9}$ Determinanter forts Kvadratiska ekv. syst. forts.

Regel:

- Multiplicera en rad/kol med ett tal och addera till annan rad/kol ("Gausselimination") ändrar inte determinanten.

Stora determinanter $n \times n$, $n \geq 3$, $\boxed{\text{Kofaktorutveckling}}$

Stora determinanter $(n\times n)$ utvecklas efter valfri rad eller kolumn till n st mindre determinanter $(n-1)\times(n-1)$

Dessa adderas/subtraheras med alternerande tecken. enligt visst schema.

ex) $\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{\text{utveckla rad 1}}{=} a\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - b\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + c\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$= a\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} =$

$= a(ei-hf) - b(di-gf) + c(dh-ge)$.

Elementen (a_{ij}) i en rad (el. kolumn) multipliceras med den mindre determinant som erhålls om man stryker den rad och kolumn varje element står i (rad i och kol j stryks), och sedan summeras med tecken enligt schemat. Tecknet är $(-1)^{r+k}$, där r är radnr och k är kol.nr.

$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{vmatrix}$ ← Minnesregel

$(-1)^{4+2}$

Tecknet är -1 upphöjt till summan av positionssiffrorna.

$(-1)^{r+k} = (-1)^{3+4} = (-1)^7 = -1$

jämn summa $\Rightarrow +$
udda summa $\Rightarrow -$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \text{Utveckla efter kolomn 2}$$

$$= -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} =$$

OBS tecknet
b är på rad 1, kol 2
tecken: $(-1)^{1+2}$

$$= -b(di-gh) + e(ai-gc) - h(af-dc).$$

ex)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{rad 1}}{\overset{\text{Utv.}}{=}} +1 \cdot \overbrace{\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=0}}^{\text{determinanten då rad och kolumn stryks där}} -1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} +1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} - 4$$

$$= -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{utv rad 2}}{=} -4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (2-3) = -4$$

Bättre utveckla efter rad el. kolumn med mycket nollor:

Alt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{kol 4}}{\overset{\text{Utv.}}{=}} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underset{\text{rad 2}}{\text{Utv.}} =$$

OBS tecken.
rad 1 + kol 4
$(-1)^{1+4} = -1$

$$= -4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = \underline{-4}$$

ex)

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{utv. rad 4}}{=} $$

(-1)

$(-1)^{4+1}$, ty står på rad 4 kol 1

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} \cancel{-5} & \cancel{-2} & \cancel{1} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{utv. kol 3}}{=} -2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (1 \cdot 7 - 0 \cdot 1) = \underline{\underline{-14}}$$

Använd determinanten för att avgöra lösningar till ekvationssystem.

- Om $\det \neq 0$ finns en entydig lösning

  $\det = 0$ finns
  - ingen eller
  - oändligt många lösningar

gäller determinanten till koefficientmatrisen.

- - - -

$$\begin{cases} x = y + z - 8 \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = -8 \\ \quad\ \ y - 2z = 0 \end{cases}$$

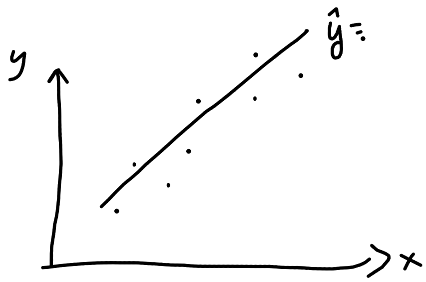
Underbestämt ekv. system.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \\ 20x - 19y = 0 \\ -3x + y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 20 & -19 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Överbestämt ekv. system saknar entydig lösning.



Minsta kvadratmetoden ger en approximativ lösning: genom att mult. med transponatet till koef. matrisen.

$$\underbrace{A^T A}_{\substack{2\times4 \quad 4\times2}} \cdot X = A^T B$$

$$\underset{2\times2}{} \quad \underset{\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}}{\hat{X}} = (A^T A)^{-1} \cdot A^T B$$

Kvadratiska ekvationssystem
(lika många ekvationer som obekanta)
Determinanten kan beräknas.

Vanlig användning av determinanter
- avgöra lösningar
  - entydig
  - ingen
  - oändligt många

till ekv. system

ex)
$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 2 \\ x + p\cdot y + 4\cdot z &= p \\ x - y + p\cdot z &= 2 \end{aligned}$$

Bestäm p så att ekv. syst. får oändligt många lösningar.

$\Downarrow$

$\det A = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & p & 4 \\ 1 & -1 & p \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ p \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & p & 4 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} (-1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & p+1 & 1 \\ 0 & 0 & p-3 \end{vmatrix} = (p+1)(p-3)$$

alt. $$\det A = \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & p & 4 \\ 1 & -1 & p \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & p \\ 1 & -1 \end{matrix} = p^2 + (-4) + (-3) - 3p - (-4) - (-p)$$

$$= p^2 - 2p - 3$$

$$\det A = 0 \iff p^2 - 2p - 3 = 0$$

$$p = 1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$p = 1 \pm 2 < \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$

forts.

$\det A = 0$ då $p = 3$ eller $p = -1$

$\underline{p=3}$ ger i
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & p & 4 \\ 1 & -1 & p \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ p \\ 2 \end{pmatrix}}_{B} \quad (*)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

z fri

$z = t$

$4y + t = 1$

$\cancel{4}y = \frac{1-t}{4}$

$y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t$

rad 1: $x - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}t\right) + 3t = 2$

$$x = \frac{9}{4} - \frac{13}{4}t$$

$\underline{\text{Svar}}$: $\begin{cases} x = 9/4 - 13/4\,t \\ y = 1/4 - 1/4\,t \\ z = t \end{cases}$

$\boxed{p=-1}$ ins i $(*)$ ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (4) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

orimligt

lösning saknas

$\underline{\text{Svar}}$: $p=-1$ ger ingen lösning

$p = 3$ ger $\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$ parameterlösn.

oändligt många lösn.

$p \neq -1,\ p \neq 3$ ger entydig lösning

Homogent ekv. system $\quad (H.L = 0)$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + a\cdot y - z = 0 \\ x - y + az = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = 0$$

$$\underbrace{A^{-1} A}_{I} X = \underbrace{A^{-1} \cdot 0}_{0}$$

$$X = 0$$

trivial lösning $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ entydig lösning om $\det A \neq 0$

Då $\underline{\det A = 0}$ erhålls andra lösningar än den triviala.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -2 \\ 0 & -2 & a-1 \end{vmatrix} = \text{Utv. koll}$$

$$= + \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a-1 & -2 \\ -2 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 - (-2)^2 = 0$$

$$a^2 - 2a + 1 - 4 = 0$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases} \quad \text{eller.}$$

$\underline{a=3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sätt $z = t$

$2y - 2t = 0$

$y = t$

$x + t + t = 0$

$x = -2t$

Svar: $\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\underline{a=-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$z = t$

$y = -t$

$x = 0$

Svar: $\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

punkter:

$x_1 \quad y_1$

$x_2 \quad y_2$

$$\underline{y = kx + m}$$

ins. (x_1, y_1): $y_1 = k \cdot x_1 + m$

(x_2, y_2): $y_2 = k \cdot x_2 + m$

$\vdots$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$y = a + bx + cx^2$$

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & & \cdots & & \\ x_1^2 & & \cdot & & & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum x & \sum x^2 \\ \sum x & \sum x^2 & \\ \sum x^2 & & \end{pmatrix}$$