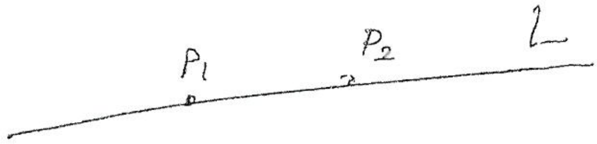
Hemuppg. 2 – vektorer

1) Linjens ekv. mellan punkterna $P_1 = (3,8,1)$
$P_2 = (4,1,7)$

$$\overline{P_1P_2} = \begin{pmatrix}4\\1\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\8\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-7\\6\end{pmatrix}$$

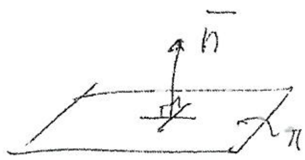


$$L: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 7t \\ z = 1 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

---

2. a) Ekvation för plan genom punkten $(2, -6, 3)$
med normalvektorn $\bar{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

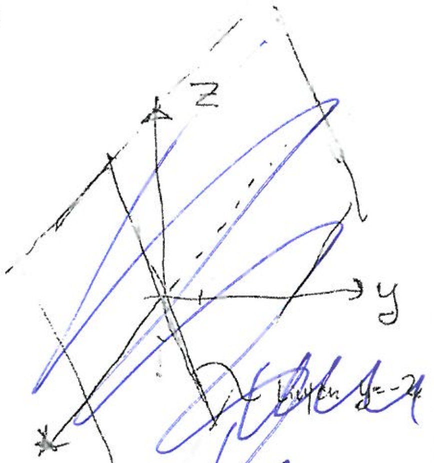
$$\bar{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$$



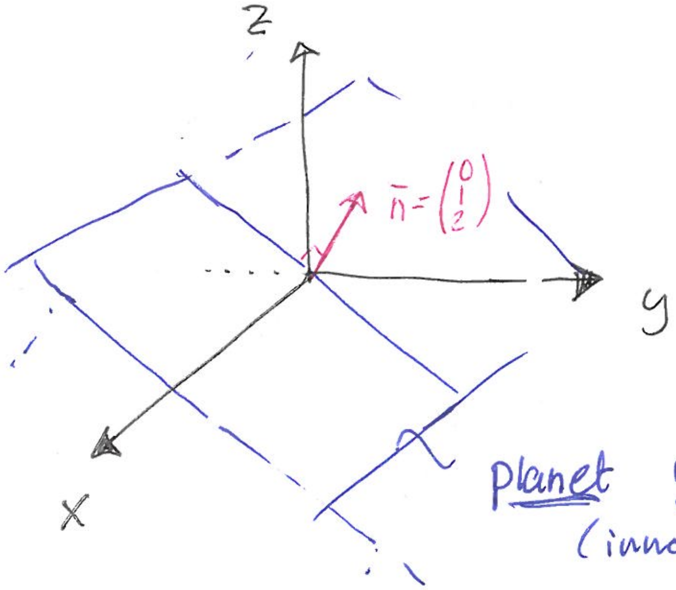
planets ekv. $Ax + By + Cz + D = 0$
$0x + 1y + 2z + D = 0$

ins punktens koordinater för att få D.

$$0 \cdot 2 + 1 \cdot (-6) + 2 \cdot 3 + D = 0$$
$$D = 0$$



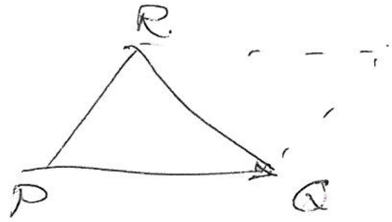
Svar: planet: $y + 2z = 0$
(innehåller x-axeln)



planet $y + 2z = 0$ (ej linje)
(innehåller x-axeln)

2b) Arean av triangel med hörn i punkterna

$(1,3,1)$, $(2,-1,0)$, $(0,4,2)$
$=P$ $\quad = Q$ $\quad = R$



$$\text{Area} = \frac{|\overline{PQ} \times \overline{PR}|}{2}$$

$$\overline{PQ} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overline{PR} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overline{PQ} \times \overline{PR} = \left| \begin{matrix} \bar e_x & \bar e_y & \bar e_z \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \bar e_x & \bar e_y \\ 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{matrix} =$$

$$= -4\bar e_x + \bar e_y + \bar e_z - (4\bar e_z) - (-\bar e_x) - \bar e_y$$
$$= -3\bar e_x - 3\bar e_z = \begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$$

(koll: $\overline{PQ} \times \overline{PR} \perp \overline{PQ}$ dvs skalärprod. $= 0$

$\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix} = -3 + 0\cdot 4 + 3 = 0$ OK.)

$$|\overline{PQ} \times \overline{PR}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\cdot\sqrt{2}. \quad = \sqrt{18}$$

$$\text{Area} = \frac{|\overline{PQ} \times \overline{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

— — — — — —

Ekv. för planet som punkterna tillhör.

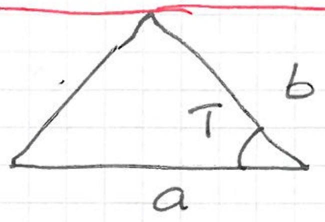
$\bar n = \overline{PQ} \times \overline{PR} = \begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix} = -3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Välj $\bar n = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$

$Ax + By + Cz + D = 0$
$1\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z + D = 0$

ins. en punkt t.ex. $(x,y,z) = (0,4,2)$ ger
$0\cdot x + 0\cdot y + 2 + D = 0$
$D = -2$

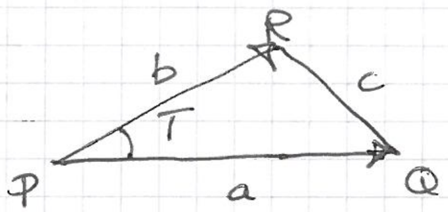
$x + z - 2 = 0$ är planets ekv.

2b) Alt: Areasatsen (av valfri triangel): $\text{Area} = \frac{ab\sin T}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(T)}{2}$



cosinussatsen: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$

här är vinkeln $C = T$.



$\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad |\overline{PQ}| = \sqrt{18}$

$\overline{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad |\overline{PR}| = \sqrt{3}$

$\overline{RQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad |\overline{RQ}| = \sqrt{33}$

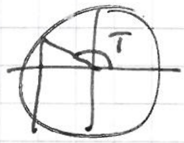
$\therefore a = \sqrt{18}$

$b = \sqrt{3}$

$c = |\overline{RQ}| = \sqrt{33}$

- cosinussatsen ger T; vinkeln mittemot c.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos T$ $\qquad 0 \leq T \leq \pi$

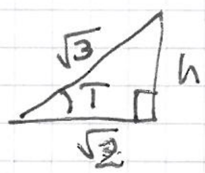


$33 = 18 + 3 - 2 \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos T$

$-\frac{(33-18-3)}{2\sqrt{18} \cdot \sqrt{3}} = \cos T$

$\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3 \cdot \sqrt{2}$

$\frac{-\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \cos T$



$h^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{3}^2$

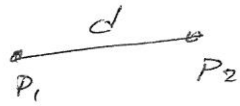
$h = 1$

$\sin T = \frac{1}{\sqrt{3}}$

- Areasatsen: $A = \frac{ab\sin T}{2} = \frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{2}}}} \approx 2.12 \text{ a.e.}$

3. Avstånd.



$\boxed{\text{a) punkt-punkt.}}$

$P_1 = (1,0,5)$
$P_2 = (3,-2,6)$

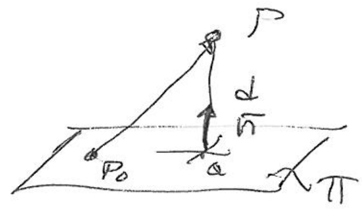
$\overline{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -2-0 \\ 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = \text{avståndet} = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = \underline{\underline{3}}$ l.e.

$\boxed{\text{b) punkt-plan.}}$ $P = (1,-3,2)$ punkt.

planet $\pi: x+y-z=7$

$\Rightarrow \bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ normalvektor till planet.



metod 1: välj valfri punkt i planet. t.ex. $P_0 = (7,0,0)$

$\overline{P_0P} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(skalär-) projektion av vektorn $\overline{P_0P}$ på normalv. $\bar{n}$ ger sökt avst.

$$d = \left| \frac{\overline{P_0P} \bullet \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \frac{\left| \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|-6-3-2|}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{11}{\sqrt{3}}}}$$

metod 2: Bilda linjen L genom $P = (1,-3,2)$ vinkelrätt mot planet som har $\bar{n}$ som riktn.vektor.

$$L = \begin{cases} x = 1+t \\ y = -3+t \\ z = 2-t \end{cases}$$

Q = skärningspunkten mellan L och planet π.? Ins L i π.

$(\cancel{x}+t) + (-3+t) - (2-t) = 7$

$1+t-3+t-2+t = 7$

$3t = 11$

$t = \frac{11}{3}$ i skärningsp.

$t = 0$ i punkten P.

sökt avs. $|\overline{PQ}| = |t \cdot \bar{n}| = \frac{11}{3} \cdot |\bar{n}| = \frac{11}{3}\sqrt{3} = \underline{\underline{\frac{11}{\sqrt{3}}}}$

Avstånd:

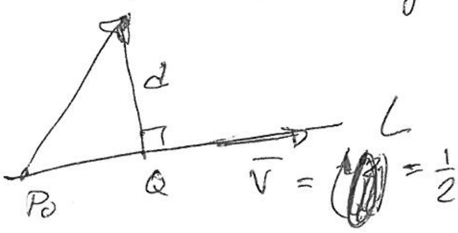
(C) Punkt-Linje

Avst. mellan $P=(1,5,0)$ och linjen.

$L: \; y=2x=z.$ (parameterfri form).

$P=(1,5,0)$.

$y=2x=z=t$ ger $\begin{cases} x = t/2 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$



$\bar{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1\\1\end{pmatrix}$

metod 1: Välj punkt på linjen $P_0=(0,0,0) \in L$.

$\overline{P_0P} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$ $\quad |\overline{P_0P}| = \sqrt{1^2+5^2+0^2} = \sqrt{26}$

proj. av $\overline{P_0P}$ på L ger $\overline{P_0Q}$: $\bar{v}=\begin{pmatrix}1/2\\1\\1\end{pmatrix} \parallel L.$

$$|\overline{P_0Q}| = \frac{|\overline{P_0P}\circ\bar{v}|}{|\bar{v}|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1/2\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1^2+1^2}} = \frac{\frac{1}{2}+5+0}{3/2} = \frac{11}{3}$$

Sökt avst. $|\overline{PQ}|=d$ (pythagorassats)

$$d^2 = |\overline{P_0P}|^2 - |\overline{P_0Q}|^2$$

$$d = \sqrt{26 - \frac{11^2}{3^2}} = \frac{\sqrt{113}}{3}$$

metod 2: Sökt avst. $|\overline{PQ}|$, där Q punkt på linjen närmast P.

$Q=(\frac{t}{2}, t, t)$ för något t.

$\overline{QP} = \begin{pmatrix}1-t/2\\5-t\\-t\end{pmatrix}$ — " — där $\overline{QP} \perp \bar{v}_1$

$\Leftrightarrow$

$\boxed{\overline{QP}\circ\bar{v}=0.}$

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \parallel L.$

$$\overline{QP}\circ\bar{v} = \begin{pmatrix}1-t/2\\5-t\\-t\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 1-\frac{t}{2}+2(5-t)-2t=0$$

$\frac{11}{4,5}=t$

$\frac{22}{9}=t$

$$|\overline{QP}| = \{t=\tfrac{22}{9}\} = \sqrt{(1-\tfrac{11}{9})^2+(5-\tfrac{22}{9})^2+(-\tfrac{22}{9})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{113}{9}} = \frac{\sqrt{113}}{3}$$

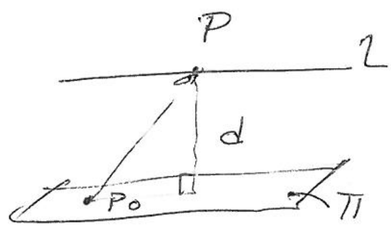
d) Avst.

$\boxed{\text{Linje-plan}}$ samma metod som punkt-plan.

kräver att linjen parallell med planet, annars skär de varandra (avst = 0)

planet: Π: $2x - 4z = 3$ (innehåller y-axeln)

linjen L: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$



- - - -

Välj punkt på linjen. t.ex $P = (5,1,0) \in L$.
Välj " i planet t.ex. $P_0 = (\frac{3}{2}, 0, 0) \in \Pi$

$$\overline{P_0P} = \begin{pmatrix} 5 - 3/2 \\ 1 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

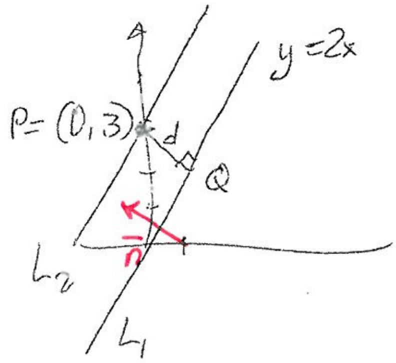
$\bar{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ normalvektor till planet.

ortogonal proj. av $\overline{P_0P}$ på $\bar{n}$ ger sökt avst.

$$d = \frac{|\overline{P_0P} \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2}} = \frac{7 + 0 + 0}{\sqrt{20}} = \underline{\underline{\frac{7}{\sqrt{20}}}}$$

e) Avst.

$\boxed{\text{linje-linje}}$



$L_1: \ y = 2x$ i $\mathbb{R}^2$.

$L_2 \ \ y = 2x+3$

$P = (0,3) \in L_2$

på L_1: $Q = (x,y) = \{y=2x\} = (t, 2t)$ för något t

$\overline{PQ} = \begin{pmatrix} t-0 \\ 2t-3 \end{pmatrix}$

sökt avst $d = |\overline{PQ}|$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ riktn. vektor till L_1.

$\overline{PQ} \cdot \bar{v} = 0$ ty $\overline{PQ} \perp \bar{v}$.

$\begin{pmatrix} t \\ 2t-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t + 4t - 6 = 0$

$5t = 6$

$t = 6/5$ ger

$\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ \frac{12}{5} - \frac{3 \cdot 5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

sökt avst $|\overline{PQ}| = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5} = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{5}}}}$

---

alt: $L_1: \ y = 2x \iff -2x + y = 0$ $\bar{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

normalvektor till linjen, dvs ortogonal mot linjen

- Välj en punkt från vardera linje och proj. på $\bar{n}$.

$P_1 = (0,0)$ $\overline{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$P_2 = (0,3)$

- proj av $\overline{P_1P_2}$ på $\bar{n}$: $\left| \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} \right| = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{5}}}}$

stl av

f) Avst.

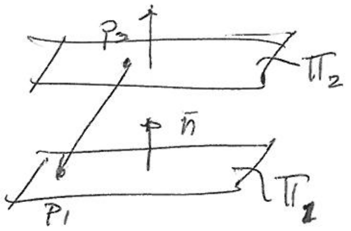
$\boxed{\text{plan-plan}}$ samma metod som avst. pkt-plan.

plan1 = Π_1 : $x+y-z=7$

plan2 : Π_2 : $x+y-z=0$

planen parallella! (annars blir avst 0)

$\bar{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ normalvektor till planen.



Välj punkt i varje plan t.ex. $P_1 = (7,0,0) \in \Pi_1$

$P_2 = (0,0,0) \in \Pi_2$

$\overline{P_2P_1} = \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}$

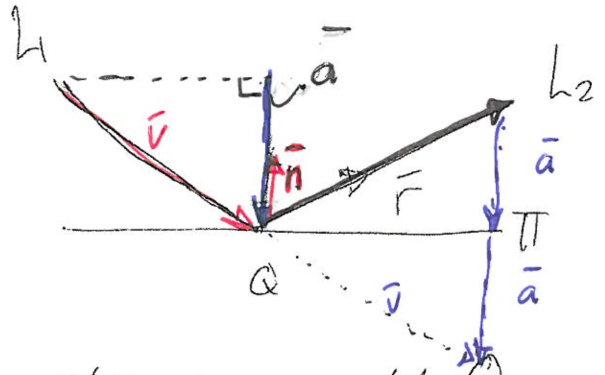
sökt avst. $d = |\text{proj av } \overline{P_2P_1} \text{ på } \bar{n}| = \underbrace{\left|\frac{\overline{P_2P_1} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}\right|}_{\text{stl. av proj.}}$

$$= \frac{\left|\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \underline{\underline{\frac{7}{\sqrt{3}}}}$$

Reflektion   stråle linjen $L = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t. \end{cases}$

studsar mot ~~ø~~ spegeln i planet. $\Pi: x + y + 2z + 1 = 0.$

$\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



a) Skärningspunkt Q. (ins. L i Π.)

$1+t + 2 + 2(3-t) + 1 = 0$

$1+t+2+6-2t+1 = 0$

$10 = t$ ins i L ger Q

$Q = (1+10, 2, 3-10) = \underline{(11, 2, -7)}$ är skärn.punkten

b) $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ riktn. till strålen.

$$\bar{a} = \operatorname{proj}_{\bar{n}} \bar{v} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2} \cdot \bar{n} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \cdot \bar{n} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 2^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1 + 0 - 2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

reflektionsvektor: $\bar{r}$

$$\bar{r} = \bar{v} - 2\bar{a} = \bar{v} - 2 \operatorname{proj}_{n} \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \left(\frac{-1}{6}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3+1 \\ 0+1 \\ -3+2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Svar: reflektionsvektor: $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är en reflektionsv. även $\bar{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Reflektionslinje: $\begin{cases} x = 11 + t \cdot 4 \\ y = 2 + t \\ z = -7 - t \end{cases}$