Linköpings universitet

Problemsamling i Linjär Algebra

för Statistik och dataanalysprogrammet

kurs 764G01

Fredrik Andersson och Åsa Ericsson

Förord

För att tillgodogöra sig kunskap i matematik krävs mycket övning i att räkna och lösa problem. Detta häfte innehåller därför gott om övningsuppgifter sammanställda som ett komplement till kursboken som används i Linjär algebra (kurs 764G01) för studenter på Statistik och dataanalysprogrammet. Häftet har samma kapitelindelning som boken *Linjär algebra – från en geometrisk utgångspunkt* av Stefan Lemurell (Studentlitteratur 2010), förutom kapitel 9 som häri handlar om kvadratiska former. Dessutom ingår i kapitel 7 övningar på Gram-Schmidt-ortogonalisering (något som finns till viss del i boken också, men utan att metoden presenterats).

Framgångsrika studier förutsätter att man arbetar med en blandning av litteraturstudier, enklare räkneuppgifter och lite klurigare problem. Därför finns det olika typer av uppgifter. Några är avsedda att arbeta med i samband med studiet av kurslitteraturen. Dessa uppgifter är markerade med T (teori). Många uppgifter kräver bara en kort räkning och är endast övning på sådant som sedan används i lite mer omfattande problem. Slutligen finns de problem som kräver några steg för att lösas. Tänk på att det är viktigt att hela lösningen redovisas! Det ska vara lätt för den som läser lösningen att förstå hur du kommit fram till svaret.

För att lära dig så mycket som möjligt är det viktigt att du när du räknat en uppgift tar några minuter till att reflektera över vad du gjort:

- *Vad har jag visat i detta exempel?*
- *Kan resultatet tolkas på något sätt?*
- *Hur hänger resultatet ihop med sånt jag redan känner till?*
- *Kan jag kontrollera svaret på något sätt?*

Ta för vana att alltid göra någon kontroll av din räkning! I detta häfte finns svar på uppgifterna men när du senare ska tillämpa dina kunskaper i linjär algebra kommer det inte finnas något facit.

Ofta behöver man till en början när man arbetar med uppgifterna ta till boken som hjälp eller söka idéer från föreläsningsanteckningar. Om du trots det inte kommer på hur du ska angripa en uppgift så finns det, som ett extra stöd för självstudierna, ledningar till vissa uppgifter. Går det ändå inte så spara det till senare och försök med nya uppgifter. Framför allt: Ge inte upp! Linjär algebra kan verka svårt i början när det införs många nya begrepp och definitioner och sättet att resonera känns ovant. Om man jobbar hårt med kursen under det stadiet brukar det lossna så småningom när man haft tid att vänja sig vid de nya begreppen.

Innehåll

Kapitel 1: Geometriska vektorer

En geometrisk vektor är ett objekt som har en storlek och en riktning – den kan representeras av en pil, eller egentligen en hel uppsättning pilar för det är samma vektor oberoende av var man placerar pilen. Till flera av uppgifterna ska man rita figurer som bör ritas med hjälp av linjal, gärna på rutat papper. Om ett koordinatsystem införs kan vektorerna anges med deras koordinater – en omistlig beskrivning som används i resten av kursen och kan generaliseras till allmänna vektorer.

$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ betecknar standardbasen med ortogonala enhetsvektorer i $\mathbb{R}^n$. Alla koordinater är med avseende på denna bas t.o.m. kapitel 7.

T **1.** Om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ ritas utifrån samma punkt blir $\bar{u} - \bar{v}$ vektorn från spetsen av $\bar{v}$ till spetsan av $\bar{u}$. Illustrera detta i en figur som även visar summan $\bar{u} + (-\bar{v})$, vilket förstås ska vara samma vektor som $\bar{u} - \bar{v}$.

T **2.** Vad är en linjärkombination av två vektorer? Ge ett exempel och illustrera med en figur.

3. Visa att om $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{w}$ är 3 icke-parallella vektorer sådana att $\bar{u} + \bar{v} + \bar{w} = \bar{0}$ så bildar de tre vektorerna sidor i en triangel.

4. Låt P_1 och P_2 vara två punkter i planet. Sätt $\bar{v}_1 = \vec{OP_1}$ och $\bar{v}_2 = \vec{OP_2}$.

a) Låt Q vara mittpunkten på sträckan P_1P_2. Uttryck vektorn $\vec{OQ}$ i $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$.

b) Låt R vara den punkt mellan P_1 och P_2 som delar sträckan P_1P_2 i förhållandet $p : q$, d.v.s.
$$\frac{|\vec{P_1S}|}{|\vec{P_2S}|} = \frac{p}{q} .$$
Uttryck vektorn $\vec{OR}$ i $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$. Kontrollera ditt svar genom att sätta $p = q$ och jämföra med a).

c) Låt S vara den punkt ligger på sträckan P_1P_2:s förlängning och som delar sträckan P_1P_2 i förhållandet $p : q$. Uttryck vektorn $\vec{OS}$ i $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$.

T **5.** Hur definieras skalärprodukten $\bar{u} \cdot \bar{v}$? Vad är $\bar{u} \cdot \bar{v}$ för slags objekt?

6. Antag att $|\bar{u}| = 2$, $|\bar{v}| = 3$ och $|\bar{u} + \bar{v}| = 4$. Beräkna vinkeln α mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$. Vad blir denna vinkel om istället $|\bar{u} + \bar{v}| = 6$?

7. Antag att vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ uppfyller $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 5$ och $\bar{u} \cdot \bar{v} = -2$. Beräkna

a) $\bar{u} \cdot (2\bar{u} + v)$.

b) $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})$.

c) $|\bar{u} - \bar{v}|$.

8. a) Visa att $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v}$ för alla $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

b) Visa att om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är vinkelräta gäller $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$.

c) Formeln i b) brukar kallas Pythagoras sats. Rita en bild som illustrerar varför.

9. Då vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ ritas med samma fotpunkt utgör de två av sidorna i en liksidig triangel med sida 2. Beräkna

a) $\bar{u} \cdot \bar{v}$.

b) $\bar{v} \cdot (\bar{u} + \bar{v})$.

c) $(\bar{u} + 2\bar{v}) \cdot (2\bar{u} - \bar{v})$.

d) $|2\bar{u} + 3\bar{v}|$.

T **10.** Redogör för projektionsformeln.

11. Bestäm projektionen av $\bar{v}$ på vektorn $\bar{u}$, uttryckt i $\bar{u}$, om $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 4$ och vinkeln mellan dem är $60°$.

T **12.** Vad behövs för (vad bestämmer) ett koordinatsystem i planet respektive i rummet?

T **13.** Vad betyder det att $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ är vektorn $\bar{u}$:s koordinater i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$?

Ange koordinaterna för $\bar{u} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

14. $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är vektorer i planet med koordinaterna $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rita $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i en figur. Rita i samma figur vektorerna

$$-\bar{v}\,, \quad \bar{u} - \bar{v}\,, \quad 2\bar{u} \quad \text{och} \quad -3\bar{u} + 2\bar{v}\,.$$

Beräkna också koordinaterna för dessa vektorer.

15. $P = (1, 2, 3)$, $Q = (4, 0, -1)$ och $R = (-2, 2, 0)$ är tre punkter i rummet.

Bestäm vektorerna $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ och $\overline{QR}$. Mellan vilka punkter är det längst?

16. Beräkna skalärprodukten $\bar{u} \cdot \bar{v}$ om $\bar{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

17. Låt $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Beräkna $\bar{u} \cdot \bar{v}$, $|\bar{u}|$, $|\bar{v}|$ samt vinkeln $\alpha \in [0, \pi]$ mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

18. Låt $\bar{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Verifiera räknelagen $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$ för dessa vektorer.

19. Beräkna vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ om

a) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$. b) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

20. En triangel har sina hörn i punkterna $(4, 0, 5)$, $(1, 2, 3)$ och $(3, 6, 4)$. Är triangeln rätvinklig? I vilket av hörnen finns i så fall den räta vinkeln?

21. Låt $\bar{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ange alla vektorer $\bar{v}$ i planet som är ortogonala mot $\bar{u}$.

22. Om $\bar{u} = 5\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, vad blir $\bar{u}$:s projektion på $\bar{e}_1$? Och på $\bar{e}_2$?

23. Bestäm ortogonalprojektionen av vektorn $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ på vektorn $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

24. Låt $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dela upp $\bar{u}$ så att $\bar{u} = \bar{u}_{//} + \bar{u}_{\perp}$ där $\bar{u}_{//}$ är parallell med $\bar{v}$ och $\bar{u}_{\perp}$ är ortogonal mot $\bar{v}$. Kontrollera att de funna vektorerna uppfyller dessa förutsättningar. Gör motsvarande uppdelning av $\bar{v}$ relativt $\bar{u}$.

T **25.** Antag att $\bar{u} = u_1\bar{e}_1 + u_2\bar{e}_2 + u_3\bar{e}_3$. Visa att $u_1 = \bar{u} \cdot \bar{e}_1$, $u_2 = \bar{u} \cdot \bar{e}_2$ och $u_3 = \bar{u} \cdot \bar{e}_3$.

26. Ligger vektorerna $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{w}$ i samma plan om

a) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\bar{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$?

b) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\bar{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$?

T **27.** Hur definieras vektorprodukten $\bar{u} \times \bar{v}$? Vad är $\bar{u} \times \bar{v}$ för slags objekt?

28. Beräkna $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

29. Ange en enhetsvektor som är ortogonal mot $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

30. Låt $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Beräkna $\bar{u} \times \bar{v}$. Kontrollera att $\bar{u} \times \bar{v}$ är ortogonal mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

b) Beräkna arean av en parallellogram som har $\bar{u}$ och $\bar{v}$ som sidor.

c) Beräkna arean av en triangel som har $\bar{u}$ och $\bar{v}$ som sidor.

d) Använd räknelagarna för vektorprodukter till att förenkla uttrycket $(3\bar{u} + 2\bar{v}) \times (2\bar{u} - \bar{v})$ och beräkna det sedan.

31. Vilken area har triangeln med hörn i $(1, 1, -1)$, $(-2, 2, 0)$ och $(-3, -1, 2)$?

32. Bestäm det villkor vektorerna $\bar{a}$ och $\bar{b}$ måste uppfylla för att $\bar{a} + \bar{b}$ och $\bar{a} - \bar{b}$ ska vara vinkelräta. Tolka resultatet geometriskt.

33. Bestäm det villkor vektorerna $\bar{a}$ och $\bar{b}$ måste uppfylla för att vektorprodukten $(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})$ ska vara noll. Tolka resultatet geometriskt.

T **34.** Vad menas med en riktningsvektor till en linje?

T **35.** Vad menas med en normalvektor till ett plan? Om $\bar{n}$ är normalvektor till ett plan, ange samtliga normalvektorer till detta plan.

T **36.** Om man vet att $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ är en normalvektor till ett plan och att $(1, -1, 1)$ ligger i detta plan, vad blir planets ekvation?

37. En linje L i planet går genom punkterna $P_1 = (1, -1)$ och $P_2 = (3, 2)$.

a) Bestäm linjens ekvation på parameterform.

b) Ange en normalvektor.

c) Bestäm linjens ekvation på normalform.

d) Vilken är den linje som går genom origo och är parallell med L?

38. Låt L vara den räta linjen genom punkterna $(1, 1, 1)$ och $(0, 4, 3)$. Illustrera med en figur.

a) Rita in en riktningsvektor. Bestäm L:s ekvation på parameterform. Kontrollera att linjen verkligen går genom de givna punkterna.

b) Ange ännu en punkt P som ligger på L och markera dess ungefärliga läge i figuren. Ange också en punkt Q som inte ligger på L. Kontrollera!

c) Bestäm L:s ekvation på parameterfri form, t.ex. genom att eliminera parametern ur ekvationen i a). Kontrollera att linjen verkligen går genom de givna punkterna.

d) Ange en linje som skär L. Ange också en linje som är parallell med L.

39. Låt Π vara planet genom punkterna $(1, 1, 0)$, $(1, 0, -1)$ och $(3, 0, 1)$. Illustrera med en figur.

a) Rita in riktningsvektorer. Ange ekvationen för Π på parameterform. Kontrollera att planet verkligen går genom de givna punkterna.

b) Ange ännu en punkt P som ligger i Π och markera dess ungefärliga läge. Ange också en punkt Q som inte ligger i Π. Kontrollera!

c) Ange ekvationen för Π på parameterfri form (normalform). Rita en lämplig normalvektor i figuren. Kontrollera att planet verkligen går genom de givna punkterna.

d) Ange ett plan som är parallellt med Π.

e) Ange en linje som ligger i planet Π.

f) Ange ett plan som är vinkelrätt mot Π.

40. Bestäm skärningspunkten mellan planet $3x - y + z = 2$ och linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Kontrollera att den funna punkten ligger både i planet och på linjen.

41. Bestäm ekvationen för det plan som är parallellt med de två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och går genom punkten $(1, 0, 2)$. Kontrollera ditt svar.

42. Skriv planet $x + 2y + z = 3$ på parameterform. Kontrollera ditt svar, t.ex. genom att sätta in dina ekvationer i den givna.

43. Bestäm skärningslinjen mellan planen $x + y + z = 3$ och $x + y - z = 1$. Kontrollera att din linje satisfierar bägge planens ekvationer.

44. Undersök vilka av de tre linjerna $L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$L_2 : 3 - x = y + 1 = \frac{z}{2}$ och $L_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ som skär varandra. Bestäm också eventuella skärningspunkter.

45. Ett plan innehåller linjen L_1 och är parallellt med linjen L_2, där

$$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm planets ekvation. Kontrollera att förutsättningarna är uppfyllda.

46. Bestäm planet som går genom $(1, 1, 1)$ och innehåller skärningslinjen mellan planen $x - y + z = 3$ och $x - z = 5$.

47. Låt $P : (1, 1, 2)$.

a) Bestäm den punkt Q i planet $x + z = 0$ som ligger närmast P. Vad blir avståndet från P till planet? Rita en figur. Kontrollera att vektorn $\vec{PQ}$ blir ortogonal mot planet.

b) Samma uppgift som (a), men planet är istället $x - z = 1$.

c) Bestäm den punkt R på linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ som ligger närmast P. Vad blir kortaste avståndet från P till linjen? Rita en figur. Kontrollera att vektorn $\vec{PR}$ blir ortogonal mot linjen.

48. Bestäm ortogonalprojektionen av linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ i planet $x + y + z = 5$. Beräkna också avståndet mellan $(5, 5, 4)$ och planet.

49. Vilket är det plan som innehåller punkten $(1, 1, 1)$ och är ortogonalt mot skärningslinjen mellan planen $x + y - z = 3$ och $2x + 3z = 7$?

50. Bestäm avståndet mellan punkten $(2, 0, 1)$ och det plan som innehåller punkten $(1, 1, 0)$ samt den räta linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Kapitel 2: Matriser

En matris är en uppsättning tal arrangerade i rader och kolumner, där varje tal sägs vara ett element i matrisen. Matriser av samma storlek kan adderas: man adderar helt enkelt element på samma position. Definitionen av multiplikation är lite mer invecklad men mycket användbar i många tillämpningar. Likaså har man användning av transponat, spår, invers och determinant av matriser.

T **1.** Vad betyder det att A är en matris av typ $m \times n$? Vad måste gälla för matriserna B och C för att man ska kunna räkna ut $A+B$ och AC?

2. Beräkna matriserna $2A$, $-B$, $A+B$, $A-B$, AB och BA om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

T **3.** Hur transponerar man en matris A? Vad betyder det att A är symmetrisk? Kan en icke-kvadratisk matris vara symmetrisk?

4. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

och $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Vilka av följande matriser är möjliga att beräkna?

AC , CA , BC , CB , AB , BA , $A+B$, $B+C$, $\bar{u}+\bar{v}$, $\bar{u}+\bar{w}$, $A\bar{u}$, $B\bar{u}$, $C\bar{u}$, $A\bar{w}$, $B\bar{w}$ och till sist (Puh!) $C\bar{w}$.

b) Beräkna dem.

5. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ samt $\lambda = 2$. Verifiera räknelagarna

$$A(BC) = (AB)C \ , \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B \quad \text{och} \quad A(B+C) = AB + AC$$

för dessa matriser.

6. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Beräkna matriserna A^t, B^t, A^tB^t, $(AB)^t$ och B^tA^t. Föreslå och utför en kontroll av de båda sista beräkningarna. Är någon av matriserna A, B och AB symmetrisk?

7. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Beräkna matriserna A^2 och A^3.

T **8.** Vad är spåret $\operatorname{Tr} A$ av en matris A? Vilken typ av objekt är det?

9. Vad är spåret för enhetsmatrisen av ordning n (d.v.s. av typ $n \times n$)?

10. Beräkna spåret av matriserna $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

T **11.** Vad betyder det att en matris A är inverterbar? Hur definieras A^{-1} om A är inverterbar?

12. Beräkna A^{-1} om $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Kontrollera ditt svar genom att räkna ut produkten AA^{-1} eller $A^{-1}A$ och verifiera att produkten blir en enhetsmatris.

13. Invertera om möjligt matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kontrollera de funna inverserna genom att multiplicera dem med ursprungsmatrisen.

14. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Beräkna matriserna $(A^{-1})^2$ och $(A^2)^{-1}$. Kommentar?

15. Lös matrisekvationerna.

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

b) $Y \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

16. Lös ut matrisen X ur sambanden, förutsatt att unik lösning finns (d.v.s. att de matriser som behöver inverteras för att lösa ut X är inverterbara).

a) $AX + B = C$

b) $AX = B + X$

c) $X^t A = I + C^t$

d) $AX^{-1}B = C^{-1}$

e) $(2A + X)B = B^2 + C$

17. Två matriser A och B sägs *kommutera* om $AB = BA$. I allmänhet kommuterar förstås inte matriser.

a) Om A är $m \times n$ och B är $p \times q$ och A och B kommuterar, vilket samband måste då gälla mellan talen m, n, p och q?

b) Om A är $n \times n$ och inverterbar, visa att A kommuterar med varje matris på formen $B = \lambda I + \mu A^{-1}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

18. Låt $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Beräkna A^2 och A^3.

b) Beräkna A^n, $n = 1, 2, \ldots$.

c) Finn en matris B sådan att $B^2 = A$.

19. Antag att $A^3 = 0$. Visa att då är $I + A + A^2$ invers till $I - A$.

Kapitel 3: Geometriska linjära avbildningar

De funktioner man får då en matris multipliceras med en vektor, där vektorn är funktionens variabel, kallas linjära avbildningar. Varje matris motsvarar en sådan funktion. Ofta tolkas linjära avbildningar geometriskt. Man säger ibland att matrisen "verkar på" vektorn och man kan tänka att matrisen gör något med vektorn så att det blir en ny vektor. Exempel på linjära avbildningar är projektioner, speglingar och rotationer.

T **1.** Hur definieras en linjär avbildning? Ge exempel på några linjära avbildningar.

T **2.** Vad är avbildningsmatrisen A (i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$) till en linjär avbildning F? Om $\bar{u}$ har koordinaterna $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, uttryck $F(\bar{u})$ med hjälp av A.

3. Visa att avbildningen som för varje vektor $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$ ges av $F(\bar{u}) = 3\bar{u}$ är en linjär avbildning. Ange också F:s matris.

4. Antag att F är en linjär avbildning. Visa att då är $F(\bar{0}) = \bar{0}$. Avgör sedan om avbildningen given av $G(\bar{u}) = \bar{u} + \bar{e}_1$ är linjär.

5. Antag att F är en linjär avbildning i planet sådan att

$$\begin{cases} F(\bar{e}_1) &= \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \\ F(\bar{e}_2) &= 3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 \end{cases}.$$

Ange F:s avbildningsmatris A och beräkna $F(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)$.

6. Antag att F är en linjär avbildning i rummet sådan att

$$\begin{cases} F(\bar{e}_1) &= \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ F(\bar{e}_2) &= -\bar{e}_1 + 3\bar{e}_3 \\ F(\bar{e}_3) &= 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}.$$

Ange F:s avbildningsmatris A och beräkna $F(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3)$.

Kontrollera ditt svar genom att också beräkna $2F(\bar{e}_1) + F(\bar{e}_2) - F(\bar{e}_3)$.

7. Antag att F är en linjär avbildning för vilken följande gäller:

$$\begin{cases} F(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3) &= 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 3\bar{e}_3 \\ F(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) &= -\bar{e}_1 + 3\bar{e}_3 \\ F(\bar{e}_2 - \bar{e}_3) &= \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}.$$

Bestäm F:s avbildningsmatris A i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Kontrollera ditt svar genom att verifiera att ovanstående relationer är uppfyllda. Beräkna också $F(2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3)$.

8. Ange F:s avbildningsmatris A om man vet att F är en linjär avbildning i planet, $F(2\bar{e}_1+\bar{e}_2)=2\bar{e}_1-\bar{e}_2$ och $F(\bar{e}_1-\bar{e}_2)=\bar{e}_1+\bar{e}_2$. Ge även en geometrisk tolkning av F.

9. Antag att F är avbildningen som projicerar på linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.v.s. för varje vektor $\bar{u}$ definieras $F(\bar{u})$ som $\bar{u}$:s ortogonalprojektion på denna linje.

a) Beräkna F:s avbildningsmatris A, t.ex. genom att bestämma basvektorernas bilder, alltså. $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ och $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, med hjälp av projektionsformeln. Kontrollera att en vektor parallell med linjen och en vektor ortogonal mot linjen avbildas som avsett.

b) Använd a) till att beräkna avståndet mellan punkten $(-2,3)$ och linjen.

c) Upprepa a) och b) för linjen $3x+4y=0$.

10. Låt F vara spegling i linjen $y=2x$ i planet.

a) Ange F:s avbildningsmatris A, t.ex. genom att beräkna basvektorernas bilder. Kontrollera att linjens riktningsvektor och normal avbildas som de ska.

b) Använd a) till att beräkna punkten $(3,1)$:s spegelbild i linjen. Beräkna också avståndet mellan punkten $(3,1)$ och dess spegelbild.

11. Antag att F är ortogonalprojektion på linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Beräkna F:s avbildningsmatris A, t.ex. genom att bestämma basvektorernas bilder med hjälp av projektionsformeln. Kontrollera att en vektor parallell med linjen och att två ej parallella vektorer ortogonala mot linjen avbildas som avsett.

b) Använd a) till att beräkna avståndet mellan punkten $(2,1,2)$ och linjen.

12. Låt G vara ortogonalprojektion i planet $x+2z=0$.

a) Beräkna G:s avbildningsmatris B, t.ex. genom att beräkna basvektorernas bilder. Kontrollera att planets normal samt två icke parallella vektorer i planet avbildas som de ska.

b) Använd a) till att beräkna punkten $(1,3,-1)$:s ortogonalprojektion i planet. Beräkna också avståndet från $(1,3,-1)$ till planet.

13. Låt F vara spegling i planet $x+y-z=0$.

a) Ange F:s avbildningsmatris A. Kontrollera att planets normal samt två icke parallella vektorer i planet avbildas som de ska.

b) Använd a) till att beräkna punkten $(2,0,-1)$:s spegelbild i planet.

Beräkna också vinkeln mellan vektorn $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och dess spegelbild.

T **14.** Hur definieras den sammansatta avbildningen $F \circ G$? Om F och G har avbildningsmatriserna A resp. B, vad blir avbildningsmatrisen för $F \circ G$?

T **15.** Hur definieras inversen F^{-1} till en bijektiv avbildning F? Om F:s avbildningsmatris är A, vad blir avbildningsmatrisen för F^{-1}?

16. Antag att F är en linjär avbildning. Visa att då är också $F^2 = F \circ F$ linjär.

17. F_θ är den linjära avbildning som i standardbasen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ges av matrisen

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

a) Låt först $\theta = \pi/6$ och rita vektorerna $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $F_\theta(\bar{e}_1)$ och $F_\theta(\bar{e}_2)$ i en figur. Låt sedan $\theta = \pi/4$ och rita vektorerna $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $F_\theta(\bar{e}_1)$ och $F_\theta(\bar{e}_2)$ i en ny figur. Tolka med hjälp av dessa figurer F_θ geometriskt.

b) Beräkna $F_{\frac{\pi}{6}}(\sqrt{3}\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$. Kontrollera med hjälp av figuren.

c) Beräkna $F_{\frac{\pi}{4}}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$. Kontrollera med hjälp av figuren.

d) Visa att $F_{\theta+\varphi}(\bar{u}) = (F_\theta \circ F_\varphi)(\bar{u})$ för alla $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ och för alla vektorer $\bar{u}$, både genom direkt räkning och genom att använda den geometriska tolkningen i a).

18. Rotera basvektorerna $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ vinkeln $3\pi/4$. De nya vektorerna (d.v.s. bilderna under avbildningen) borde förstås också bilda en ON-bas. Kontrollera att det blir så.

19. Låt R_θ vara avbildningen som roterar vektorer i planet vinkeln θ i positiv riktning, d.v.s. moturs.

a) Förklara varför denna avbildning måste ha en invers och beskriv denna (i ord – någon ekvation eller formel behövs ej här).

b) Hur ser avbildningsmatrisen ut för inversen till $R_{\frac{\pi}{3}}$?

c) Vilken rotation ges av den sammansatta avbildningen $R_{\frac{\pi}{6}} \circ R_{-\frac{\pi}{3}}$? Skriv ner avbildningsmatrisen.

20. Låt P vara avbildningen som motsvarar projektion på ett plan i rummet och S den avbildning som speglar i samma plan. Rita figurer och förklara i ord följande likheter:

a) $P \circ P = P$

b) $S \circ P = P$

c) $P \circ S = P$

Kapitel 4: Rummet $\mathbb{R}^n$

Geometriska vektorer i planet och rummet kan beskrivas med två resp. tre koordinater. Denna beskrivning kan vi enkelt generalisera till godtyckligt antal koordinater vilket ger oss vektorer i rummet $\mathbb{R}^n$.

1. Låt $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beräkna $-3\bar{u}$, $\bar{u}+\bar{v}$, $\bar{u}-\bar{v}$ och $\bar{u}\cdot\bar{v}$.

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Beräkna A^2, AB och BA.

3. Invertera om möjligt följande matriser. Kontrollera ditt svar på vanligt sätt.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Beräkna determinanterna av följande matriser.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

5. Avgör om nedanstående mängder är linjärt beroende eller oberoende. Om de är beroende, skriv en av vektorerna som en linjärkombination av de övriga.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Kapitel 5: Linjära ekvationssystem

Många problemställningar leder fram till linjära ekvationssystem, där det gäller att bestämma ett antal obekanta som ingår i flera linjära ekvationer. Dessa kan lösas med Gauss-elimination och bakåtsubstitution i en totalmatris. Att förstå vilka olika typer av lösningar som finns är också viktigt.

T **1.** Vilka olika möjligheter finns för antalet lösningar till ett linjärt ekvationssystem?

T **2.** Vilka olika möjligheter finns för antalet lösningar till ett linjärt *homogent* ekvationssystem?

3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 4 \end{cases}.$$

t.ex. med hjälp av gausselimination. Kontrollera erhållna lösningar genom att sätta in dem i ekvationssystemet.

4. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z &= 0 \\ 2y + 5z &= 7 \\ 3z &= 4 \end{cases}.$$

t.ex. med bakåtsubstitution. Kontrollera erhållna lösningar genom att sätta in dem i ekvationssystemet.

5. Verifiera att $x = -35 + 19t$, $y = 25 - 13t$, $z = t$ är en lösning till

$$\begin{cases} 2x + 3y + z &= 5 \\ 5x + 7y - 4z &= 0 \end{cases}.$$

för alla värden på $t \in \mathbb{R}$.

6. Lös ekvationssystemet nedan. Kontrollera erhållna lösningar.

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 3 \\ 6x + 12y - 9z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{cases}$$

7. Lös ekvationssystemet nedan. Kontrollera erhållna lösningar.

$$\begin{cases} 2y - 3z &= -1 \\ x + 2y - z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= 2 \end{cases}$$

8. a) Lös ekvationssystemet nedan. Kontrollera erhållna lösningar.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z &= 5 \\ x + y - z &= 2 \\ -3x - y + 5z &= -4 \end{cases}$$

b) Ersätt högerleden i a) med nollor och lös det erhållna systemet. Jämför ditt svar med svaret du fick i a). Kommentera resultatet.

9. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2y + z &= 2 \\ x - 4z &= -4 \\ x - y &= 1 \end{cases} .$$

Kontrollera som alltid de erhållna lösningar genom att sätta in dem i ekvationssystemet.

10. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 2a \\ 3x_1 + (a+5)x_2 - 2x_3 &= 4 \end{cases} .$$

a) för $a = 0$ b) för $a = 1$ c) för $a = -3$

11. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} y + 2z - w &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ x - z + 2w &= 0 \end{cases} .$$

12. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases} .$$

13. För vilka värden på a har ekvationssystemen nedan entydig, oändlig många respektive ingen lösning? (Du behöver inte ange lösningarna.)

a) $\begin{cases} x - y &= 1 \\ ax + 4y &= 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y &= 1 \\ ax + 4y &= -4 \end{cases}$

14. Lös ekvationssystemet nedan för alla värden på parametrarna a och b.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + ax_2 &= b \end{cases}$$

Föreslå lämpliga kontroller av svaret och utför dessa.

15. Bestäm skärningspunkten (om det finns någon) mellan planen

$$x + y - z = 0\ , \quad 2x - y - 3z = 2 \quad \text{och} \quad 3\text{x} + 4\text{y} + \text{z} = 3\,.$$

Verifiera att den funna punkten ligger i alla tre planen.

16. Bestäm skärningslinjen mellan planen

$$2x + 5y + 9z = -1 \quad \text{och} \quad \text{x} + 2\text{y} + 4\text{z} = 0\,.$$

Verifiera att den funna skärningslinjen har en riktningsvektor som är ortogonal mot planens normaler. (Hur kan du genast se från ekvationerna att planen inte är parallella och därmed måste skära varandra?)

T **17.** Ett linjärt ekvationssystem med två eller tre ekvationer i tre variabler kan ha noll, en eller oändligt många lösningar. Förklara detta geometriskt i ord och bild!

18. Grafen till ett andragradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ går genom punkterna $(-1, 1)$, $(1, -1)$ och $(2, 7)$. Vilket är polynomet? Tänk på att kontrollera ditt svar.

19. Linus och Linnea har bra koll på hur mycket de cyklar på en vecka.

a) Under en läsperiodsvecka cyklar Linnea 10 gånger mellan hemmet och universitetet (d.v.s. hon cyklar fram och tillbaka en gång varje vardag), 2 gånger mellan hemmet och innerstan samt 2 gånger mellan hemmet och Ryds Herrgård. Trippmätaren på hennes cykel visar då 29 km.

Under en tentamensperiodsvecka cyklar hon 4 gånger mellan hemmet och universitetet samt 4 gånger mellan hemmet och innerstan. Då visar trippmätaren 24 km.

Under en vecka när Linnea sommarjobbar cyklar hon 12 gånger mellan hemmet och innerstan samt 4 gånger mellan hemmet och Ryds Herrgård. Då visar trippmätaren 50 km.

Hur långt ifrån universitetet, innerstan resp. Ryds Herrgård bor Linnea?

b) Linus gör lika många cykelturer som Linnea, men hans trippmätare visar 27 km, 14 km resp. 26 km under de aktuella veckorna. Hur långt från de tre ställena bor Linus?

Bonusfråga: Var i Linköping bor Linus och Linnea?

20. Då Linus går och handlar mjölk i Ryds centrum hittar han lättmjölk (0.5% fetthalt), mellanmjölk (1.5% fetthalt) och standardmjölk (3% fetthalt). Linus är dock lite kräsen och dricker bara mjölk med 2% fetthalt.

a) Om Linus handlar av alla 3 mjölksorterna, hur många deciliter av varje sort kan han blanda för att få en liter av sin favoritmjölk?

b) En morgon upptäcker Linus att hans korridorkamrat Linnea (Linus har nämligen flyttat sedan vi senast träffade honom i uppgiften före) druckit upp all mellanmjölk. Hur många deciliter av varje sort ska han då ta för att få en liter 2%-ig mjölk?

21. Invertera följande matriser i de fall det är möjligt.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&5&5\\-1&-1&0\\2&4&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&4&5\\2&7&-1\\1&3&-6\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&3&2\\-2&0&-4\end{pmatrix}.$$

Kontrollera inverserna genom att multiplicera dem med ursprungsmatrisen.

22. Sätt

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\3&1&2\\-2&2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&2\\2&0&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&0&4\\1&1&-1\\3&1&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&8&8\\3&-1&1\\5&7&9\end{pmatrix}.$$

Lös matrisekvationerna:

a) $AX=B$ b) $XA=B$ c) $AXB=C$

d) $AX=B-2X$ e) $CX=A$ f) $CX=D$

T **23.** Vad menas med minsta kvadrat-lösningen till ett linjärt ekvationssystem $A\bar{x}=\bar{b}$? Hur räknar man ut den?

24. Låt $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\bar{b}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$.

a) Visa att ekvationssystemet $A\bar{x}=\bar{b}$ saknar lösning.

b) Finn det $\bar{x}$ som minimerar $|\bar{b}-A\bar{x}|$ och beräkna det minimala värdet. Kontrollera att $A\bar{x}$ är ortogonal mot $\bar{b}-A\bar{x}$.

c) Använd resultatet i b) till att finna $\bar{b}$:s ortogonalprojektion i det plan som går genom origo och är parallellt med vektorerna $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.
Vilket är avståndet från $\bar{b}$ (eller rättare sagt från punkten vars ortsvektor är $\bar{b}$) till planet. Rita en schematisk figur.

25. Visa att ekvationssystemet saknar lösning och bestäm en approximativ lösning med hjälp av minsta kvadrat-metoden.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 10 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{cases}$$

Om $A\bar{x} = \bar{b}$ är systemet skrivet på matrisform, kontrollera ditt svar genom att visa att $A\bar{x}$ är ortogonal mot $\bar{b} - A\bar{x}$. Ange minimala värdet av felet $|\bar{b} - A\bar{x}|$.

26. Finn minsta kvadrat-lösningen till ekvationssystemet. Vad blir felet? Kommentera resultatet!

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{cases} .$$

27. Ange ortogonal-projektionen av vektorn $\bar{b}$ på ett plan parallellt med vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$, då $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

28. Minsta kvadrat-anpassa en rät linje till följande mätdata:

$(x_1, y_1) = (-1, -2)$, $(x_2, y_2) = (0, 0)$, $(x_3, y_3) = (2, 2)$.

Kontrollera svarets rimlighet genom att rita in linjen och mätpunkterna i ett koordinatsystem.

29. Minsta kvadrat-anpassa en rät linje $s = kt + m$ till följande mätdata:

t	1	2	3	4
s	5,1	6,7	9,1	10,9

Rita in mätpunkterna och linjen i ett koordinatsystem. Bestäm även det kvadratiska medelfelet $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(s_i - (kt_i + m)\Big)^2$ (n är antal mätpunkter).

30. Följande punkter (x, y) är uppmätta: $(-2, -6)$, $(-1, 0)$, $(1, 8)$, $(2, 17)$

Bestäm det andragradspolynom som, i minsta kvadrat-mening, bäst stämmer med mätdata. Rita punkterna och den anpassade kurvan i ett koordinatsystem.

31. Vi vill anpassa en exponentialkurva $y = Ce^{\lambda t}$ till följande mätserie: $(t_1, y_1) = (0, 1)$, $(t_2, y_2) = (1, 2)$, $(t_3, y_3) = (2, 8)$. (Denna modell skulle t.ex. kunna beskriva tillväxten hos en bakteriekoloni vid god näringstillgång.)

a) Förklara hur minsta kvadrat-metoden kan åstadkomma detta.

b) Härled normalekvationen för detta problem. Vad blir den sökta exponentialkurvan? Om du har tillgång till dator eller grafritande räknare, rita upp exponentialkurvan och jämför med den givna mätserien.

Kapitel 6: Determinant

Determinanten är en reellvärd funktion av kvadratiska matriser. Den definieras av tre egenskaper: linjäritet med avseende på rader, att två lika rader ger värdet 0 och att determinanten av identitetsmatrisen är 1. Detta innebär bl.a. att absolutbeloppet av determinanten är den "volym" som spänns upp av matrisens kolonnvektorer. För att beräkna determinanter används lämpligen radoperationer och det visar sig att linjära ekvationssystems lösbarhet hänger på om determinanten är nollskild.

T **1.** Låt $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ och $\bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ samt sätt $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$.

a) Skriv ner ett uttryck för $\det A$. Vad för slags objekt är det?

b) Vad har $\det A$ med parallellepipeden med sidor $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{w}$ att göra?

c) Hur hänger $\det A$ ihop med vektorernas orientering?

d) Uttryck $\det A$ i $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{w}$.

e) Sätt $B = \begin{pmatrix} 3u_1 & 3v_1 & 3w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 + w_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 + w_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 + w_3 & w_3 \end{pmatrix}$ och

$D = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 + 2u_1 & v_3 + 2v_1 & w_3 + 2w_1 \end{pmatrix}$.

Bestäm $\det B$, $\det C$ och $\det D$ uttryckt i $\det A$ med hjälp av räknelagarna för determinanter.

2. Sätt $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ och $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Beräkna $\det A$, $\det B$ och $\det C$.

3. Beräkna determinanten av matriserna:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

4. Beräkna determinanten av matriserna:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5. Vilken area har parallellogrammen med vektorerna $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ som sidor?

6. Vilken volym har parallellepipeden med vektorerna $(1\ \ 0\ \ 1)^t$, $(2\ \ 5\ \ -1)^t$ och $(4\ \ 2\ \ 1)^t$ som kanter?

7. Låt $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$. Använd räknelagarna för determinanter till att uttrycka följande determinanter i $\det A$.

a) $\det \begin{pmatrix} 2u_1 & 2v_1 & 2w_1 \\ -u_2 & -v_2 & -w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$

b) $\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ 3u_2 + 2u_1 & 3v_2 + 2v_1 & 3w_2 + 2w_1 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$

c) $\det \left(\frac{1}{3}A\right)$

8. Bestäm volymen av en tetraeder med hörn i punkterna $P_1 : (1, 0, 1)$, $P_2 : (2, 1, -1)$, $P_3 : (3, -1, -1)$ och $P_4 : (0, 2, 2)$.

9. a) Antag att $\det A = 4$ och $\det B = -\frac{1}{2}$. Beräkna $\det(A^2BA^{-1})$.

b) Förenkla $\det(C^{-1}(I + D^{-1})C^2D)$.

10. Visa att om A och T är kvadratiska matriser och T är inverterbar, så är

a) $\det(A^tA) \geq 0$ och $\det(T^tT) > 0$.

b) $\det(AT) = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$.

c) $\det(T^{-1}AT) = \det A$.

11. Lös ekvationerna:

a) $\det \begin{pmatrix} 1 & x^2 & x^4 \\ 2 & 8 & 32 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} = 0$ b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & x & 3 \end{pmatrix} = 0$

12. Förenkla uttrycket $\det \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

13. Sätt $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 2 & 3 & a \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$. För vilka värden på a är A är inverterbar?

14. För vilka värden på konstanten a har planen $x+2y+az = 1$, $2x+ay+8z = -1$ och $ax - 2y = -1$ ingen skärningspunkt, exakt en skärningspunkt respektive mer än en skärningspunkt? Vad blir skärningen i det sista fallet?

Kapitel 7: Baser

Linjärt oberoende/beroende är ett centrala begrepp i linjär algebra. Tillräckligt många linjärt oberoende vektorer bildar en bas. Då kan varje annan vektor uttryckas som en unik linjärkombination av dem. Med en ny bas följer nya koordinater och nya avbildningsmatriser. I det viktiga specialfallet med byte mellan två ON-baser ges sambandet mellan de olika koordinaterna av en ortogonalmatris.

Om inget annat anges är koordinaterna givna i standardbasen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ för $\mathbb{R}^n$.

T **1.** Vad betyder det att en mängd vektorer $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ är linjärt beroende?

2. Vilka av följande mängder vektorer är linjärt beroende resp. linjärt oberoende?

a) $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

c) $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

d) $\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

e) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

f) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

g) $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

h) $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

i) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

3. I varje deluppgift, avgör om mängden $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ är linjärt beroende eller oberoende. Skriv om möjligt $\bar{u}$ som en linjärkombination av $\bar{v}$ och $\bar{w}$. Kontrollera ditt svar.

a) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \bar{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

b) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \bar{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \bar{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$

c) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

d) $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$

4. Avgör om $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ är en ON-bas för rummet om

a) $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Kan $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ i b) göras till en ON-bas på något enkelt sätt?

5. Finn (om möjligt) en ON-bas $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ för planet sådan att $\bar{f}_1$ är parallell med $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\bar{f}_2$ pekar in i andra kvadranten. Kontrollera ditt svar.

6. Avgör om vektorerna $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ är linjärt beroende eller oberoende. Om de är oberoende, använd Gram-Schmidt-ortogonalisering för att finna en ON-bas med en basvektor parallell med $\bar{v}_1$ och ytterligare en i planet som spänns av $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$.

a) $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

7. Finn (om möjligt) en ON-bas $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ för rummet sådan att:

a) $\bar{f}_1$ är parallell med $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\bar{f}_2$ är parallell med $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) $\bar{f}_1$ är parallell med $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\bar{f}_2$ är parallell med $\bar{e}_1\bar{e}_2$-planet.

8. Låt Π vara ett plan som är parallellt med vektorerna $(1 \;\; 0 \;\; -1)^t$ och $(2 \;\; 1 \;\; -3)^t$. Ange en ON-bas sådan att två av basvektorerna är parallella med Π. Kontrollera att ditt svar uppfyller de givna förutsättningarna.

9. Linus och Linnea vill hitta koordinaterna för vektorn $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i basen $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$, där $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Linus ser att $\bar{v} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2$ och hävdar därför att koordinaterna blir $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Linnea upptäcker då att $\bar{v} = -\bar{f}_1 + \bar{f}_3$ och hävdar därför att koordinaterna blir $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Då Linus och Linnea vet att samma vektor inte kan beskrivas med två olika uppsättningar koordinater i samma bas (varför?) förstår de att någon av dem måste ha tänkt fel. Men vem?

T **10.** Antag att A är en 3×3-matris sådan att $\det A \neq 0$. Vad kan mer sägas om matrisen A?

11. För vilka x är vektorerna $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2x+3 \end{pmatrix}$ linjärt beroende? Uttryck $\bar{w}$ som linjärkombination av $\bar{u}$ och $\bar{v}$ för dessa x.

12. För vilka a ligger punkterna $(a, 1, 2)$, $(1, a, 3)$, $(1, 1, 1)$ och $(0, 1, 1)$ i samma plan?

T **13.** Låt $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ och $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ vara två baser för rummet.

a) Hur definieras transformationsmatrisen T för basbytet? Skriv upp bassambanden, d.v.s. uttryck basmatriserna $\underline{e} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{pmatrix}$ och $\underline{f} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \bar{f}_3 \end{pmatrix}$ i varandra med hjälp av T.

b) Om vektorn $\bar{u}$ har koordinaterna $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ och koordinaterna $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ i basen $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$, uttryck X och Y i varandra med hjälp av T.

c) Om den linjära avbildningen F har avbildningsmatrisen A_e i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ och avbildningsmatrisen A_f i basen $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$, uttryck A_e och A_f i varandra med hjälp av T.

14. Bestäm sambandet mellan koordinaterna för $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = y_1\bar{f}_1 + y_2\bar{f}_2$ i de båda baserna $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ och $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ där

$$\begin{cases} \bar{f}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \\ \bar{f}_2 = 3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 \end{cases}.$$

15. Låt $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ vara en bas för planet. Sätt $\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{f}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$.

a) Visa att $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ är en bas för planet (dock ej en ON-bas).

b) Beräkna koordinaterna för vektorn $\bar{u} = \bar{f}_1 + 3\bar{f}_2$ i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

c) Beräkna koordinaterna för vektorn $\bar{v} = 5\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ i basen $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$. Föreslå och utför en kontroll av svaret.

d) Beräkna koordinaterna för vektorn $\bar{w} = \bar{e}_1 + \bar{f}_2$ i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ resp. $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$. Kontrollera!

T **16.** Vad betyder det att T är en ortogonalmatris? Om T är en transformationsmatris för ett basbyte från en ON-bas, vad kan då sägas om den nya basen?

T **17.** Vad är utmärkande för en isometrisk avbildning? Ge exempel på isometriska avbildningar.

18. I varje deluppgift, avgör om den givna matrisen är en ortogonalmatris. Om den inte är ortogonal, kan man byta ut sista kolumnen till något som gör att det blir en ortogonalmatris?

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

19. Låt $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ vara en ON-bas för planet. Sätt

$$\bar{f}_1 = \tfrac{1}{2}(\bar{e}_1 + \sqrt{3}\bar{e}_2) \quad \text{och} \quad \bar{f}_2 = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{3}\bar{e}_1 + \bar{e}_2)\ .$$

a) Visa att $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ är en ON-bas för planet och ange transformationsmatrisen T för detta basbyte.

b) Avgör om T är en ortogonalmatris.

c) Låt $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = y_1\bar{f}_1 + y_2\bar{f}_2$. Uttryck y_1 och y_2 i x_1 och x_2.

d) Den linjära avbildningen F uppfyller $F(\bar{e}_1 + \sqrt{3}\bar{e}_2) = \sqrt{3}\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$ samt $F(-\sqrt{3}\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 - \sqrt{3}\bar{e}_2$. Ange först F:s matris A_f i basen $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$. Beräkna ur detta F:s matris i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

20. Låt $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ vara en pos. orienterad ON-bas för planet. Bilda en ny bas $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ genom att vrida $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ vinkeln $\frac{\pi}{4}$ moturs.

a) Uttryck $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$ i $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$. Ange transformationsmatrisen T för detta basbyte.

b) Avgör om T är en ortogonalmatris.

c) Låt $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = y_1\bar{f}_1 + y_2\bar{f}_2$. Uttryck y_1 och y_2 i x_1 och x_2.

d) Den linjära avbildningen F uppfyller $F(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = 3(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$ samt $F(-\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$. Ange först F:s matris A_f i basen$\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$. Beräkna ur detta F:s matris i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

21. Låt F vara ortogonalprojektion i planet $x + 2z = 0$. Koordinaterna är med avseende på basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

a) Finn en ON-bas $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ sådan att $\bar{f}_1$ är ortogonal mot planet och $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$ är parallella med planet. Kontrollera!

b) Ange F:s matris A_f i basen $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$.

c) Beräkna F:s matris A_e i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Kontrollera!

d) Beräkna ortogonalprojektionen av vektorn $(\,2 \;\; -1 \;\; 2\,)^t$ i planet.

e) Låt G vara spegling i samma plan. Ange G:s matris B_f i basen $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$.

f) Beräkna G:s matris B_e i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Kontrollera!

g) Bestäm spegelbilden av punkten $(2, -1, 2)$ i planet.

h) Visa att $F \circ G = G \circ F$. Illustrera i en figur.

22. Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning som i standardbasen har matrisen

$$A_e = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris A_f i basen $\bar{f}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\bar{f}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tolka och beskriv i ord vad F gör med vektorerna i planet.

23. En parallellogram i planet har hörn i origo, $(1, 3)$, $(4, 2)$ och $(5, 5)$. Ange en linjär avbildning som avbildar parallellogrammen på en axelparallell kvadrat med sida 1. Bestäm arean av parallellogrammen.

Kapitel 8: Egenvärden och egenvektorer

Spektralteori hjälper oss att välja "rätt" bas för den enklaste beskrivningen av en avbildning. Egenvektorerna till en avbildning, och till dess matris, är de vektorer som inte ändrar riktning under avbildningen; egenvärdena är den faktor längden ändras med. Om en bas kan bildas av egenvektorer är avbildningen diagonaliserbar: i den basen är matrisen diagonal med egenvärdena på diagonalen. Speciellt är detta alltid sant för symmetriska matriser som enligt spektralsatsen kan diagonaliseras av en ON-bas.

T **1.** Definiera vad som menas med att $\bar{u}$ är en egenvektor till en matris A med egenvärde λ.

T **2.** Hur bestämmer man egenvärdena till en linjär avbildning F med matris A?

3. Låt den linjära avbildningen F ges av matrisen $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Avgör vilka av vektorerna $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ som är egenvektorer till F och bestäm i förekommande fall motsvarande egenvärden.

4. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildningen F med matris $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$. Kontrollera ditt svar genom att multiplicera A med de funna egenvektorerna.

5. Finn samtliga egenvärden och egenvektorer till matriserna.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Tänk på att kontrollera dina svar.

6. Finn samtliga egenvärden och egenvektorer till matriserna.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Tänk på att kontrollera dina svar.

7. Antag att $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är egenvektorer till en linjär avbildning F med egenvärden 2 resp. -1. Beräkna $F(-\bar{u}+2\bar{v})$, $F(2\bar{u}-\bar{v})$, $F^2(\bar{u})$, $F^5(\bar{v})$, $F^2(2\bar{u}+3\bar{v})$. Beräkna också $F^{-1}(\bar{u})$ och $F^{-1}(2\bar{u}+3\bar{v})$ i fallet att F är inverterbar.

T **8.** Vad måste gälla för att en matris A ska vara diagonaliserbar?

T **9.** Hur lyder spektralsatsen?

T **10.** Vad är spåret $\operatorname{Tr} A$ uttryckt i egenvärdena λ_i till en $n \times n$-matris A?

11. Diagonalisera matrisen för var och en av deluppgifterna, d.v.s. finn en bas av egenvektorer (välj en ON-bas), en ortogonalmatris T och en diagonalmatris D sådana att $A = TDT^{-1}$. Kontrollera dina svar. Kontrollera speciellt att summan av egenvärdena är spåret av A.

a) $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

12. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Bestäm A:s egenvärden och en ON-bas av egenvektorer. Finn en ortogonalmatris T och en diagonalmatris D sådana att $A = TDT^{-1}$. (Hur vet man genast att det går?) Kontrollera att spåret för A och D stämmer överens.

13. Den linjära avbildningen F har egenvärden -1, 0 och 1 och motsvaranade egenvektorer $(1\ \ 0\ \ 1)^t$, $(1\ \ 1\ \ 0)^t$ resp. $(0\ \ 1\ \ 1)^t$. Avgör (*utan* att beräkna avbildningsmatrisen) om F är symmetrisk. Bestäm sedan avbildningsmatrisen till F. Kontrollera att den funna matrisen har de önskade egenskaperna.

14. För avbildningarna i deluppgifterna nedan, ange vilka egenvärden de har och beskriv motsvarande egenvektorer. Om möjligt, skriv ner en diagonal avbildningsmatris.

a) F är ortogonalprojektion i ett plan Π genom origo.

b) G är en spegling i ett plan Π genom origo.

c) H är en rotation vinkeln θ kring vektorn $\bar{v}$.

15. Låt F ges av avbildningsmatrisen $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Finn samtliga egenvärden och egenvektorer till F. Kontrollera!

b) Ange en ON-bas $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ av egenvektorer till F samt en ortogonalmatris T sådan att F:s avbildningsmatris A_f i basen $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ blir en diagonalmatris. Kontrollera! Ange också A_f.

c) Illustrera i en figur hur $F(\bar{u})$ kan konstrueras ur $\bar{u}$ för en godt. vektor $\bar{u}$. Tolka F geometriskt.

16. Låt F ges av matrisen $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. Tolka F geometriskt. Kontrollera ditt svar.

17. Låt $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Finn ett utryck för A^n (för $n > 0$ heltal). Kontrollera att det stämmer för $n = 2$ genom direkt beräkning av A^2.

b) Bestäm en matris B sådan att $B^2 = A$. Kontrollera.

18. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Beräkna A^2 och A^3.

b) Använd diagonalisering för att beräkna A^n, $n = 1, 2, \ldots$.
Kontrollera ditt svar genom att verifiera att det stämmer för $n = 1, 2, 3$.

19. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm A^n, $n = 1, 2, \ldots$.

b) Bestäm en matris X sådan att $X^2 = A$.

Kapitel 9: Kvadratiska former

En kvadratisk form är en (reellvärd) funktion av flera variabler innehållande endast termer kvadratiska i variablerna. Den kan representeras av en symmetrisk matris och via diagonalisering kan den kvadratiska formen skrivas med nya koordinater utan s.k. korstermer.

T **1.** Skriv ner en allmän kvadratisk form av två variabler både på matrisform och utan matriser.

T **2.** Vad kan sägas om egenvärdena till matrisen svarande mot en

a) positivt definit kvadratisk form?

b) positivt semidefinit kvadratisk form?

c) indefinit kvadratisk form?

Ge exempel på kvadratiska former $Q(x, y)$ i varje deluppgift.

3. Vilka av följande funktioner är kvadratiska former?

a) $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 3x_2^2$

b) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2$

c) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$

d) $Q(x_1, x_2) = x_1^2$

e) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1x_3 + 5x_2x_3$

f) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1x_3 + 5x_1x_2x_3$

g) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$

4. Skriv följande kvadratiska former på matrisform, med en symmetrisk matris.

a) $Q(x, y) = 5xy$

b) $Q(x, y, z) = xy + y^2 + z^2 - 3yz$

c) $Q(x, y, z) = (x - 2z)^2$

5. Om $Q(x_1, x_2, x_3)$ är en kvadratisk form gäller $Q(ax_1, ax_2, ax_3) = a^2Q(x_1, x_2, x_3)$ för alla reella x_1, x_2, x_3 och a.

a) Verifiera detta för $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1x_3 + 5x_2x_3$.

b) Verifiera att det *inte* gäller för $Q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - 3x_1x_3 + 5x_1x_2x_3$.

6. Låt $Q(x_1, x_2) = 7x_1^2 - 3x_1x_2 + 3x_2^2$ och sätt $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

a) Finn en symmetrisk 2×2-matris A sådan att $Q(x_1, x_2) = X^tAX$. Kontrollera ditt svar genom att räkna ut produkten X^tAX.

b) Finn en ON-bas $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ bestående av egenvektorer till matrisen A. Bestäm också motsvarande egenvärden λ_1 resp. λ_2. Kontrollera.

c) Finn en ortogonalmatris T och en diagonalmatris D sådana att $A = TDT^t$. Kontrollera.

d) Låt $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vara koordinater i nya basen $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$. Uttryck Q som funktion av y_1 och y_2. Vilket samband gäller mellan koordinaterna i den nya basen och i den gamla?

e) Beskriv och rita den kurva som ges av sambandet $Q(x_1, x_2) = 1$.

f) Beskriv och rita den kurva som ges av sambandet $Q(x_1, x_2) = 5$.

7. Beskriv och rita kurvan $Q(x_1, x_2) = 1$ om

a) $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

b) $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 8x_1x_2 + 9x_2^2$.

8. Låt $Q(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 15x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_3$ och sätt $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

a) Finn en symmetrisk 3×3-matris A sådan att $Q(x_1, x_2, x_3) = X^tAX$. Kontrollera ditt svar genom att räkna ut produkten X^tAX.

b) Finn en ON-bas $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ bestående av egenvektorer till matrisen A. Bestäm också motsvarande egenvärden λ_1, λ_2 resp. λ_3. Kontrollera.

c) Finn en ortogonalmatris T och en diagonalmatris D sådana att $A = TDT^t$. Kontrollera!

d) Låt $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ vara koordinater i nya basen $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$. Uttryck Q som funktion av y_1, y_2 och y_3. Vilket samband gäller mellan koordinaterna i den nya basen och i den gamla?

e) Beskriv och skissa den yta som ges av sambandet $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$.

f) Beskriv och skissa den yta som ges av sambandet $Q(x_1, x_2, x_3) = 5$.

9. Beskriv och rita ytan $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$ om

a) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \frac{3}{8}x_2^2 + \frac{3}{8}x_3^2 - \frac{1}{4}x_2x_3$.

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Ledningar

Kapitel 1

3. Rita!

4. Rita en figur. Teckna den sökta vektorn som summan av ett antal vektorer som du sedan bestämmer.

6. Använd att $|\bar{w}|^2 = \bar{w} \cdot \bar{w}$. För följdfrågan: Vad är kortaste vägen mellan två punkter? Rita en triangel.

7. a,b) Använd räknelagar för skalärprodukt till att multiplicera in i parentesen. Sätt sedan in de givna värdena.

c) Kom ihåg att $|\bar{w}|^2 = \bar{w} \cdot \bar{w}$.

8. a) Kom ihåg att $|\bar{w}|^2 = \bar{w} \cdot \bar{w}$.

9. Använd räknelagar för skalärprodukt till att multiplicera med parenteser. Vad är vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$?

15. Vektorn mellan två punkter är skillnaden mellan ortsvektorerna, t.ex. $\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$. Avståndet är detsamma som längden av vektorn.

19. Beräkna skalärprodukten för vektorerna på två sätt.

24. Använd först projektionsformeln, sedan att $\bar{u}_\perp = \bar{u} - \bar{u}_{//}$.

25. Skalärmultiplicera den givna relationen med $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ (en i taget).

26. *Alt. 1:* Försök skriva en av vektorerna som en linjärkombination av de andra. *Alt. 2:* Ta två av vektorerna och bestäm en normalvektor till planet de spänner upp (normalen ska vara vinkelrät mot vektorerna i planet; använd skalärprodukt). Är den tredje ortogonal mot normalen?

29. Vilken riktning har vektorprodukten? Hur lång är den?

30. d) Förenkla först så långt som möjligt. Använd sedan resultatet ifrån a).

31. Bestäm först vektorerna som motsvarar två av sidorna.

32. $\bar{a}+\bar{b}$ och $\bar{a}-\bar{b}$ är vinkelräta om deras skalärprodukt är noll. Vilket villkor ger detta för $\bar{a}$ och $\bar{b}$? Rita två vektorer som uppfyller detta. Rita in vektorerna $\bar{a}+\bar{b}$ och $\bar{a}-\bar{b}$.

37. b) Normalen ska vara ortogonal mot riktningsvektorerna för planet. Använd skalärprodukt för att ställa upp ett ekvationssystem. Längden för normalen spelar ingen roll så en koordinat kan väljas fritt.

40. x, y och z givna av linjens ekvation måste uppfylla planets ekvation. Detta ger ett värde på parametern t vilket motsvarar punkten där linjen skär planet.

43. Hitta två punkter (x, y, z) som uppfyller båda planens ekvationer. Notera att värdet på z bestäms av ekvationerna, medans det för x och y finns många möjligheter. Vilken är linjen som går genom dessa punkter? (Svaret kan *se* olika ut beroende av val av punkter.)

Kapitel 2

5. För att verifiera en räknelag, räkna ut högerledet och vänsterledet i likheten var för sig och kolla att det faktiskt blir samma svar.

6. Använd räknelagarna för transponat för kontrollen.

7. $A^2 = A\,A\,,\ A^3 = A\,A\,A\,.$

15. Om man multiplicerar med rätt matrisinvers från rätt sida i likheten kan man få X resp. Y ensamt kvar i ena ledet.

16. Lös ekvationerna i flera steg. Det är liknande som när man löser vanliga ekvationer, men man måste komma ihåg att vid matrismultiplikation spelar det roll från vilket håll man multiplicerar och att istället för att dividera måste man multiplicera med inversen.

17. a) Vad måste gälla för att två matriser ska kunna multipliceras? Av vilken typ är den nya matrisen?

b) Multiplicera B med A från höger och sedan från vänster och se att det blir samma.

18. b) Ser du något mönster från $A\,,\ A^2$ och A^3 som kan generaliseras? Eftersom det är en diagonal matris blir det relativt enkelt.

19. Använd definitionen av invers och kontrollera att multiplikation ger identitetsmatrisen.

Kapitel 3

3. Använd definitionen av linjär avbildning.

4. Prova att sätta in lämpliga värden på t.ex. $\bar{u}$ eller λ i definitionen av en linjär avbildning. (Bevis finns i kursboken.) Vad blir $G(\bar{0})$?

7. Lös ut $F(\bar{e}_1)$, $F(\bar{e}_2)$ och $F(\bar{e}_3)$.

8. För tolkningen: Dela upp en godtycklig vektor $\bar{u}$ i komposanter parallella med $\bar{e}_1$ resp. $\bar{e}_2$ och se efter i din figur hur dessa avbildas. Vad blir alltså $F(\bar{u})$?

9. b) Bestäm först var punkten $(-2, 3)$ hamnar vid projicering.

c) Bestäm först en riktningsvektor för linjen.

10. I en figur ses att om $\bar{u} = \bar{u}_{//} + \bar{u}_{\perp}$ där $\bar{u}_{//}$ är parallell med linjen och $\bar{u}_{\perp}$ är ortogonal mot linjen ges $\bar{u}$:s spegelbild i linjen av uttrycket $\bar{u} - 2\bar{u}_{\perp}$.

16. Använd definitionen av linjär avbildning.

17. d) Avbildningen $F_{\theta+\varphi}$ har avbildningsmatrisen $A_{\theta+\varphi}$ och $F_\theta \circ F_\varphi$ har avbildningsmatrisen $A_\theta A_\varphi$. Visa att dessa är lika.

18. Skriv upp avbildningsmatrisen för rotationen och multiplicera denna med $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Räkna sedan ut skalärprodukten mellan vektorerna som fås samt kontrollera att de har längd 1.

Kapitel 4

4. Gör radoperationer för att förenkla, t.ex. så att matriserna blir triangulära.

5. a,b) Använd determinanter för att avgöra frågan. (Man kan även använda definitionen av linjärt beroende/oberoende, men detta kräver troligen längre räkning.)

c) Använd definitionen av linjärt beroende/oberoende. (Varför kan man inte använda determinant här?)

Kapitel 5

7. Tänk på att ekvationerna inte måste skrivas i samma ordning som i uppgiften.

8. b) Du såg väl att lösningen blev samma som 'parameterdelen' av lösningen i a-uppgiften? Varför blir det så?

9. Tänk på att ekvationerna inte måste skrivas i samma ordning som i uppgiften.

13. Använd gausselimination för att skriva systemet på trappstegsform. När blir vänsterledet i sista ekvationen noll? Vad blir det för lösning då? Och om vänsterledet inte blir noll?

14. Gausseliminera som vanligt. Vad måste a uppfylla för villkor för att du ska kunna lösa ut någon obekant entydigt? Vad händer om detta villkor *inte* är uppfyllt?

16. Koefficienterna i ekvationerna ger planens normalvektorer. Det inses lätt att $(2\ 5\ 9)^t$ och $(1\ 2\ 4)^t$ ej är parallella så då är inte heller planen parallella.

17. Varje ekvation av tre variabler kan alltid ses som ekvationen för ett plan. På vilka olika sätt kan två plan skära varandra? Och tre plan?

18. Skriv upp vad det betyder att punkterna ligger på grafen (tre punkter ger tre villkor). Lös det uppkomna ekvationssystemet.

19. Kalla t.ex. de sökta avstånden för x, y resp. z och använd problemtexten till att hitta linjära samband mellan dessa obekanta.

20. Var noga med enheterna. Vilka värden är tillåtna för eventuella parametrar i lösningen?

22. I uppgift a–d kan man lösa ut X, beräkna nödvändiga inverser och sedan beräkna X. Alternativt, och ofta lite effektivare, kan man för a) ställa upp totalmatrisen och använda gausselimination, likaså för b) och d) om man först gör en omskrivning till formen ”matris gånger $X =$ en annan matris” (använd transponat för omskrivning i b). I e–f används gausselimination.

26. Efter att du löst uppgiften, observera att detta system faktiskt *har* en lösning och att denna är samma som minsta kvadrat-lösningen – därmed är felet $= 0$. Det hade förstås varit bäst att först försöka lösa ekvationssystemet som vanligt.

27. Om $\bar{w}$ är $\bar{b}$:s ortogonalprojektion i det givna planet så är $\bar{w} = x_1\bar{u} + x_2\bar{v}$ för några tal x_1 och x_2. Med $A = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{v} \end{pmatrix}$ och $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ är således $A\bar{x} = \bar{w}$. Tänk nu på att $\bar{w}$ är den vektor i planet som minimerar $|\bar{b} - \bar{w}|$, d.v.s. ”minsta avstånd=ortogonalt avstånd”.

28. Ansätt $y = kx + l$ och sätt in mätpunkterna. Då fås ett linjärt ekvationssystem för k och l.

30. Ett andragradspolynom ges av $p(x) = ax^2 + bx + c$. Sätt in punkterna och bestäm sedan bästa lösningen för koefficienterna a, b och c.

31. Ta logaritmen av båda leden. Det ger ett linjärt beroende av t.

Kapitel 6

3. Använd t.ex. radoperationer för att förenkla till triangulär form (alternativt använd Sarrus regel).

4. Använd radoperationer och/eller kolonnoperationer för att förenkla till triangulär form.

7. a) Hur påverkar 2 ggr en rad? Och -1 ggr en rad?

b) Skriv om med hjälp av radoperationer i två steg.

c) Tänk dig t.ex. att du förenklat A till triangulär form. Hur många gånger kommer faktorn framför matrisen ”påverka värdet” på determinanten?

8. Tetraederns volym är basytan·höjden/3. Parallellepipeden med samma sidor har dubbelt så stor basyta, och dess volym ges av basytan·höjden.

10. Använd räknelagarna för determinanter. Vad kan sägas om $\det T$?

11. a) Börja t.ex. med radoperationerna $r2 - 2r1$ och $r3 - 3r1$. Bryt sedan ut gemensamma faktorer ur rad 2 och 3.

12. Summera samtliga rader.

13. Kom ihåg att A är inverterbar om och endast om $\det A = 0$.

14. Ett ekvationssystem har unik lösning om och endast om determinanten för dess koefficient-matris är skild från noll (då är den inverterbar). Undersök därför när determinanten är 0.

Kapitel 7

2. Fundera över vad det innebär att en mängd vektorer med ett visst antal element är linjärt beroende resp. oberoende. För mängderna i denna uppgift behöver man knappt räkna för att kunna svara på frågan.

3. Avgör beroendet antingen genom att lösa beroendeekvationen eller beräkna determinanten av en matrisen. För en linjärkombination: Ansätt $\bar{v}_1$ som en linjärkombination av de andra två och lös ekvationssystemet för koefficienterna. (Varför går det inte i uppgift d, trots att vektorerna är linjärt beroende?)

7. Använd t.ex. Gram-Schmidt-metoden. För att få en tredje vektor att utgå från, ta vilken som helst (välj en enkel!) som inte är en linjärkombination av de första två. (Alternativt kan den tredje vektorn bestämmas från att dess skalärprodukt med de fösta två ska vara noll.)

8. Använd t.ex. Gram-Schmidt-metoden.

12. Rita figur. Tre vektorer behöver undersökas.

18. Kom ihåg att en ortogonalmatris (även kallad ON-matris) har kolumner som är normerade och ortogonala mot varandra.

21. b) Vad blir bilderna av de nya basvektorerna? Tänk på att bilderna måste uttryckas i *nya* basen för att ge avbildningsmatrisens kolonner.

d) Det räcker att göra en matrismultiplikation.

22. Använd bassatsen för att bestämma matrisen. Hur påverkas $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$?

23. ”Axelparallell kvadrat med sida 1” innebär att dess sidor ska ges av basvektorerna $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$. Ett tips är att börja från kvadraten och bestämma vilken avbildning som avbildar den på parallellogrammen. Den sökta avbildningen är i då inversen av denna. Areaförändring ges av determinanten.

Kapitel 8

3. Lös *inte* någon sekularekvation. Använd istället definitionen av egenvärde och egenvektor. (Beräkna $A\bar{v}$.)

7. Använd linearieteten hos F tillsammans med definitionen av egenvärde och egenvektor.

11. Kom ihåg att $T^{-1} = T^t$ för ortogonalmatriser.

13. Vad kan sägas om egenvektorer hörande till olika egenvärden till en symmetrisk avbildning? För andra delen: notera att de givna egenvektorerna bildar en bas för rummet och att definitionen av egenvärden och egenvektorer direkt ger F:s avbildningsmatris i denna bas. Använd sedan basbytesformeln för att komma tillbaka till den givna basen.

14. Tänk på att en vektor $\bar{u}$ är en egenvektor till F om och endast om $F(\bar{u})$ är parallell med $\bar{u}$.

15. c) Observera att egenvektorerna med egenvärde 1 bildar ett plan i rummet, och att de övriga egenvektorerna alla är ortogonala mot detta plan. Komposantuppdela $\bar{u}$ i en komposant parallell med planet och en komposant parallell med övriga egenvektorer. Hur avbildas dessa komposanter? Hur avbildas följdaktligen $\bar{u}$?

16. Egenvektorer med egenvärde 1 ändras inte av F. Så vad är det som faktiskt ändras av F? Vilken är ändringen?

17. a) Diagonalisera, ta potensen av diagonalmatrisen och transformera sedan tillbaka till den ursprungliga basen.

b) Diagonalisera, ta ”kvadratroten” ur diagonalmatrisen och transformera sedan tillbaka till den ursprungliga basen (notera att det mesta av räkningen kan enkelt ”kopieras” från a-uppgiften med liten ändring).

19. a) Diagonalisera, ta potensen av diagonalmatrisen och transformera sedan tillbaka till den ursprungliga basen.

b) Diagonalisera, ta ”kvadratroten” ur diagonalmatrisen och transformera sedan tillbaka till den ursprungliga basen.

Kapitel 9

6. e) Hur ser detta samband ut i koordinaterna y_1 och y_2? Vad är det för kurva? Tänk också på att y_1-axeln är riktad längs den nya basvektorn $\bar{f}_1$.

f) Dela båda leden med 5. Hur ändras kurvan jämfört med e)?

7. Gör som i uppgiften ovan.

8. b) Notera att en egenvektor och dess egenvärde kan ses direkt i matrisen. (Testa vektorn $(0\ \ 1\ \ 0)^t$.)

Svar

Kapitel 1

4. a) $\vec{OQ} = \dfrac{1}{2}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$

b) $\vec{OR} = \dfrac{1}{p+q}(p\bar{v}_2 + q\bar{v}_1)$ c) $\vec{OS} = \dfrac{1}{p-q}(p\bar{v}_2 - q\bar{v}_1)$

6. $\alpha = \arccos \frac{1}{4}$. Andra fallet är omöjligt, ty $|\bar{u} + \bar{v}| \leq |\bar{u}| + |\bar{v}|$ för alla vektorer (tänk på sidorna i en triangel), men $6 > 2 + 3 = 5$.

7. a) 16 b) -16 c) $\sqrt{38}$

9. a) 2 b) 6 c) 6 d) $2\sqrt{19}$

10. $\bar{u}_{//} = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{v} \cdot \bar{v}}\, \bar{v}$, där $\bar{u}_{//}$ är $\bar{u}$:s ortogonalprojektion på $\bar{v}$.

11. $\bar{v}_{//\bar{u}} = \frac{2}{3}\, \bar{u}$

13. Att $\bar{u} = u_1\bar{e}_1 + u_2\bar{e}_2$. Koordinaterna är $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

14. $-\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{u} - \bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $2\bar{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $-3\bar{u} + 2\bar{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}$.

15. $\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overline{PR} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ och $\overline{RQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Största avståndet är mellan R och Q ($|\overline{RQ}| = \sqrt{41}$).

16. -6

17. $\bar{u} \cdot \bar{v} = 12$, $|\bar{u}| = \sqrt{6}$, $|\bar{v}| = 4\sqrt{2}$ och $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

19. a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{3}$

20. Ja. Den räta vinkeln finns i $(1, 2, 3)$.

21. $\bar{v} = t\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

22. $5\bar{e}_1$ resp. $\bar{e}_2$

23. $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

24. $\bar{u}_{//} = \frac{5}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_{\perp} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_{//} = \frac{5}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_{\perp} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix}$.

26. a) Ja b) Nej

27. $\bar{u}\times\bar{v}$ är den entydigt bestämda vektor som uppfyller $|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\alpha$, där α är vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$, $\bar{u}\times\bar{v}\perp\bar{u}$, $\bar{u}\times\bar{v}\perp\bar{v}$ samt att $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{u}\times\bar{v}$ är positivt orienterade.

28. $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

29. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ eller $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

30. a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $3\sqrt{6}$ c) $\frac{3}{2}\sqrt{6}$ d) $-7\bar{u}\times\bar{v} = 7\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

31. $\frac{5}{2}\sqrt{6}$

32. $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ så att $\bar{a}$ och $\bar{b}$ spänner upp en romb. $\bar{a}+\bar{b}$ och $\bar{a}-\bar{b}$ är diagonalerna i romben.

33. $\bar{a}\times\bar{b} = 0$; $\bar{a}$ och $\bar{b}$ är parallella.

34. En vektor som är parallell med linjen, dock ej nollvektorn.

35. En vektor som är ortogonal mot varje vektor som är parallell med planet (eller kortare mer oprecist: en vektor som är ortogonal mot planet), dock ej nollvektorn. Samtliga normalvektorer ges av $\lambda\bar{n}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$.

36. $x + 2y + 3z = 2$

37. a) T.ex. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$. b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $3x - 2y = 5$ d) $3x - 2y = 0$

38. a) T.ex. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

b) T.ex. $P:(2,-2,-1)$, $Q:(1,4,3)$.

c) $1 - x = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{2}$

d) T.ex. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$, skär L,

och t.ex. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$, är parallell med L.

39. a) T.ex. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

b) T.ex. $P : (2, 0, 0)$, $Q : (3, 0, 0)$.

c) $x + y - z = 2$

d) T.ex. planet $x + y - z = 0$.

e) T.ex. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$..

f) T.ex. planet $x - y = 0$.

40. Punkten är $\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, 1\right)$.

41. $4x - 2y + z = 6$

42. T.ex. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$..

43. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

44. Endast L_1 och L_3 skär varandra. Detta inträffar i $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

45. $3x - y - 2z = -5$

46. $3x - 5y + 7z = 5$

47. a) $Q = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$, Avståndet$=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

b) $Q = (2, 1, 1)$, Avståndet$=\sqrt{2}$.

c) $R = (\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, -1)$, Avståndet$=\frac{7}{\sqrt{5}}$.

48. Linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Avståndet$= 3\sqrt{3}$.

49. $3x - 5y - 2z = -4$

50. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Kapitel 2

1. A har m rader och n kolumner. B måste vara av samma typ. C måste ha n rader.

2. $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$,

$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Man byter plats på rader och kolonner, eller annorlunda uttryckt: Matrisens element speglas i huvuddiagonalen. A är symmetrisk om $A = A^t$. Då måste A vara kvadratisk för annars är A och A^t av samma typ.

4. a,b) De som går att beräkna är:

$$AC = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -2 \\ -8 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$CB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B\bar{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C\bar{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

CA, AB, $A + B$, $B + C$, $\bar{u} + \bar{w}$, $C\bar{u}$, $A\bar{w}$ och $B\bar{w}$ existerar ej.

6. $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$A^tB^t = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, $(AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = B^tA^t$.

B är symmetrisk medan A och AB ej är symmetriska.

7. $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -20 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 36 & -92 \\ -23 & 59 \end{pmatrix}$.

8. Summan av elementen på diagonalen. Det är en skalär, d.v.s. ett tal.

9. $\operatorname{Tr} I_n = n$

10. $\operatorname{Tr} A = 6\,,\ \operatorname{Tr} B = 3\,.$

11. A är inverterbar om det finns en matris X sådan att $AX = XA = I$. Om detta gäller sätter vi $A^{-1} = X$.

12. $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

13. $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, B^{-1} existerar ej och $C^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

14. $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

15. a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $Y = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$

16. a) $X = A^{-1}(C - B)$ b) $X = (A - I)^{-1}B$

c) $X = (A^t)^{-1}(I + C)$ d) $X = (A^{-1}C^{-1}B^{-1})^{-1} = BCA$

e) $X = B + CB^{-1} - 2A$

17. a) $m = n = p = q$

18. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

b) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{2n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

c) T.ex. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Kapitel 3

1. En vektorvärd funktion F som är både additiv och homogen, d.v.s. $F(\bar{u}+\bar{v}) = F(\bar{u}) + F(\bar{v})$ och $F(\lambda\bar{u}) = \lambda F(\bar{u})$ för alla vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ och alla reella tal λ. Projektioner, speglingar och rotationer är exempel på linjära avbildningar.

2. A:s kolonner ges av koordinaterna för basvektorernas bilder, alltså koordinaterna för $F(\bar{e}_1)$, $F(\bar{e}_2)$ och $F(\bar{e}_3)$, i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

$F(\bar{u}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$).

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. Avbildningen G är ej linjär.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $F(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) = -2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $F(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3) = \bar{e}_1 - 8\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$.

7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $F(2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3) = 6\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 14\bar{e}_3$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. F är en spegling i $\bar{e}_1$-axeln.

9. a) $A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\frac{11}{\sqrt{10}}$

c) $A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$. Avståndet $= \frac{6}{5}$.

10. a) $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. b) Spegelbilden$=(-1,3)$. Avståndet $= 2\sqrt{5}$.

11. a) $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

12. a) $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Punktens projektion är $(\frac{6}{5}, 3, -\frac{3}{5})$. Avståndet $= \frac{1}{\sqrt{5}}$.

13. a) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Spegelbilden blir $(0, -2, 1)$. Vinkeln$=$ $\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$.

14. $(F \circ G)(\bar{u}) = F(G(\bar{u}))$ för alla $\bar{u}$. Avbildningsmatrisen blir AB.

15. F^{-1} är den avbildning som uppfyller $F^{-1} \circ F = I$ och $F \circ F^{-1} = I$.
Alternativ definition är att för F^{-1} gäller $F^{-1}(\bar{u}) = \bar{v} \Leftrightarrow F(\bar{v}) = \bar{u}$.
Avbildningsmatrisen blir A^{-1}.

17. a) F är en rotation vinkeln θ moturs. b) $\sqrt{2}\bar{e}_2$ c) $\bar{e}_1 + \sqrt{3}\bar{e}_2$

18. De roterade vektorerna: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

19. a) Om man först roterar vinkeln θ moturs kan man enkelt komma tillbaka genom att rotera vinkel θ medurs. Alltså är inversen rotation vinkeln θ i negativ riktning: $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$

b) $(R_{\frac{\pi}{3}})^{-1} = R_{-\frac{\pi}{3}}$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) Rotation vinkeln $-\pi/3$ följt av rotation vinkeln $\pi/6$ blir totalt rotationen vinkeln $-\pi/6$.

$R_{-\frac{\pi}{6}}$: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

20. a) Om man projicerar ”hamnar man” i planet. Andra gången man projicerar händer ingenting mer.

b) Om man projicerar ”hamnar man” i planet. Vektorer i planet påverkas inte av den efterföljande speglingen.

c) Tänk dig att du tittar på planet från ett håll från vilket planet är horisontellt och en vektor pekar mot en punkt P_1 ovanför planet. Då kommer punkten ligga rakt ovanför projektionspunkten. När man speglar kommer spegelpunkten ligga rakt under projektionspunkten. Den efterföljande projektionen gör att ”man hamnar” i projektionspunkten, så den inledande speglingen påverkar inte slutresultatet.

Kapitel 4

1. $-3\bar{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -9 \\ -15 \end{pmatrix}$, $\bar{u}+\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\bar{u}-\bar{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\bar{u}\cdot\bar{v} = -6$.

2. $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 & 4 \\ 4 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 4 & -3 & -2 \\ -2 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 8 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$,

$BA = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ b) Inversen existerar ej.

c) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 11 & -3 \\ -5 & 7 & 11 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

4. a) 15 b) -36

5. a) Linjärt oberoende.

b) Linjärt beroende. T.ex. är $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Linjärt oberoende.

Kapitel 5

1. Inga lösningar, entydig lösning eller oändligt många lösningar.

2. Endast den triviala lösningen $\bar{0}$ eller oändligt många lösningar.

3. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/6 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

7. Lösning saknas.

8. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}\,.$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}\,.$

9. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

10. a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}\,.$

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) Lösning saknas.

11. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}\,.$

12. $x_1 = 0\,,\ x_2 = -t\,,\ x_3 = 0\,,\ x_4 = t\,,\quad t \in \mathbb{R}\,.$

13. a) $a = -4$: lösning saknas. $a \neq -4$: entydig lösning.

b) $a = -4$: oändligt många lösningar. $a \neq -4$: entydig lösning.

14. $a \neq 6$: $x_1 = \dfrac{3a - 2b}{a - 6}$, $x_2 = \dfrac{b - 9}{a - 6}$

$a = 6$, $b \neq 9$: Lösning saknas.

$a = 6$, $b = 9$: $x_1 = 3 - 2t$, $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}\,.$

15. Punkten $(x, y, z) = (2, -1, 1)$.

16. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}\,.$

17. Varje ekvation av tre variabler motsvarar ett plan.

Två plan kan antingen sammanfalla (=oändligt många lösningar), vara parallella men ej samma (=ingen lösning) eller skära i en linje (=en lösning).

Tre plan antingen sammanfalla (=oändligt många lösningar), ha två eller alla tre parallella (=ingen lösning), parvis skära varandra i linjer som är parallella (=ingen lösning) eller skära varandra i en punkt vilket sker om de parvisa skärningslinjerna inte är parallella (=en lösning).

18. $p(x) = 3x^2 - x - 3$

19. a) Linnea bor 2 km från universitetet, 4 km från innerstan och 0,5 km från Ryds Herrgård.

b) Linus bor 2 km från universitetet, 1,5 km från innerstan och 2 km från Ryds Herrgård.

Bonusfrågan: Linnea bor i Ryd E (studentbostäderna bakom Ryds Herrgård) och Linus bor på Flamman.

20. a) t dl standardmjölk, $15 - \frac{5}{2}t$ dl mellanmjölk och $-5 + \frac{3}{2}t$ dl lättmjölk, där $\frac{10}{3} \leq t \leq 6$.

b) 6 dl standardmjölk och 4 dl lättmjölk.

21.

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \; D^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

C^{-1} existerar ej.

22. a) $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & 35 \\ 0 & 2 & -22 \end{pmatrix}$ b) $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 4 \\ -28 & -7 & 16 \\ 18 & 6 & -12 \end{pmatrix}$

c) $X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 18 & 4 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ d) $X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & -3 & -7 \\ 11 & 2 & 21 \\ -4 & -2 & -14 \end{pmatrix}$

e) Saknar lösning.

f) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2r & -2s & -2t \\ 3r & 3s & 3t \\ r & s & t \end{pmatrix}, \; r, s, t \in \mathbb{R}$.

23. Minsta kvadrat-lösningen är det $\bar{x}$ som minimerar $|\bar{b} - A\bar{x}|$. Den kan beräknas genom att lösa normalekvationen $A^t A\bar{x} = A^t\bar{b}$.

24. b) $\bar{x} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Minimala värdet$= \frac{5}{\sqrt{3}}$.

c) Ortogonalprojektionen är $A\bar{x} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Avståndet$= \frac{5}{\sqrt{3}}$.

25. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Minimala värdet$= \sqrt{\frac{10}{3}}$.

26. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Det blir inget fel; minsta kvadrat-lösningen är här en exakt lösning. Systemet kunde ha lösts utan minsta kvadrat-metoden.

27. Ortogonalprojektionen är $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$.

28. Linjen blir $y = \dfrac{9}{7}x - \dfrac{3}{7}$.

29. Linjen blir $y = 1,98t + 3,00$. Kvadratiska medelfelet $= 0,082$.

30. Andragradspolynomet blir $y = \frac{5}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}$.

31. a) Med $r = \ln y$ kan vi minsta kvadrat-anpassa en rät linje till mätserien $(t_1, r_1) = (0,0)$, $(t_2, r_2) = (1, \ln 2)$, $(t_3, r_3) = (2, 3\ln 2)$.

b) Normalekvationen blir $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \ln C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\ln 2 \\ 4\ln 2 \end{pmatrix}$.

Den sökta exponentialkurvan blir $y = 2^{-\frac{1}{6}} e^{\left(\frac{3}{2}\ln 2\right)t}$.

Kapitel 6

1. a) $\det A = u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - u_3v_2w_1 - v_3w_2u_1 - w_3u_2v_1$ är en skalär.

b) $|\det A|$ ger volymen av parallellepipeden.

e) $\det A > 0$ om $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ är positivt orienterade. $\det A < 0$ om $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ är negativt orienterade.

d) T.ex. $\det A = \bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$.

e) $\det B = 3\det A$, $\det C = \det D = \det A$.

2. $\det A = 6$, $\det B = 0$ och $\det C = \frac{9}{4}$.

3. a) -2 b) 0

4. a) -84 b) 1

5. Arean är 10 areaenheter.

6. Volymen är 9 volymsenheter.

7. a) $-2\det A$ b) $3\det A$ c) $\frac{1}{27}\det A$

8. Volymen $= \frac{1}{2}$ volymsenheter.

9. a) -2 b) $\det C \det(D + I)$

11. a) $x = \pm\sqrt{2}$ $x = \pm 2$. b) $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$.

12. $(a + 2b)(a - b)^2$

13. $a \neq \pm 2$

14. $a = 4$: Ingen skärningspunkt. $a \neq 4, -2$: Exakt en skärningspunkt.

$a = -2$: Skärningen utgörs av linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ (d.v.s. mer än en skärningspunkt).

Kapitel 7

1. Att någon av vektorerna $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ kan skrivas som en linjärkombination av de övriga.

2. c), d), e), g) och h) är linjärt beroende. Övriga är linjärt oberoende.

3. a) Linjärt beroende och $\bar{u} = -\bar{v} + \bar{w}$.

b) Linjärt oberoende. $\bar{u}$ är alltså ingen linjärkombination av de andra.

c) Linjärt beroende och $\bar{u} = \frac{3}{5}\bar{v} - \frac{4}{5}\bar{w}$.

d) Linjärt beroende, men $\bar{u}$ är ingen linjärkombination av $\bar{v}$ och $\bar{w}$ (dessa två är nämligen parallella).

4. a) Nej b) Nej c) Ja d) Ja, genom att normera vektorerna.

5. T.ex. $\bar{f}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. a) Linjärt oberoende. En ON-bas: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Linjärt beroende (t.ex. så är $\bar{v}_3 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$).

c) Linjärt oberoende. En ON-bas: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

7. a) T.ex. $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) T.ex. $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{110}}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

8. T.ex. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ är en ON-bas med första och tredje basvektorn i Π.

9. Båda har tänkt fel. $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ är ingen bas för rummet eftersom vektorerna är linjärt beroende.

10. T.ex. att A är inverterbar, att ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$ har entydig lösning för alla $\bar{b}$ och att A:s kolonner (likaså raderna) är linjärt oberoende och därför utgör en bas för rummet.

11. $x = 0$: $\bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$.

$x = 1$: $\bar{w} = -3\bar{u} + 4\bar{v}$.

$x = -\frac{5}{2}$: $\bar{w} = -\frac{2}{3}\bar{u} - \frac{2}{3}\bar{v}$.

12. $a = 1$

13. a) T:s första kolonn ges av $\bar{f}_1$:s koordinater i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, o.s.v.
$\underline{f} = \underline{e}T \;\Leftrightarrow\; \underline{e} = \underline{f}T^{-1}$

b) $X = TY \;\Leftrightarrow\; Y = T^{-1}X$

c) $A_f = T^{-1}A_eT \;\Leftrightarrow\; A_e = TA_fT^{-1}$

14. $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& y_1 + 3y_2 \\ x_2 &=& 2y_1 + 4y_2 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcl} y_1 &=& \frac{1}{2}(-4x_1 + 3x_2) \\ y_2 &=& \frac{1}{2}(2x_1 - x_2) \end{array}\right.$

(Detta kommer från $X = TY \;\Leftrightarrow\; Y = T^{-1}X$, med $T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$)

15. b) $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ resp. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

16. $T^{-1} = T^t$. Den nya basen är också en ON-bas.

17. En isometrisk avbildning bevarar skalärprodukter och därmed både längder och vinklar. Dess matris är en ortogonalmatris. Exempel: rotationer och speglingar.

18. a) Ortogonal

b) Ej ortogonal. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ som sista kolumn ger ortogonalmatris.

c) Ortogonal.

d) Ej ortogonal. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ som sista kolumn ger ortogonalmatris.

e) Ej ortogonal. Kan inte göras ortogonal bara genom att ändra sista kolumnen. (Men den blir ortogonal om man normerar de första två kolumnerna.)

19. a) $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

b) Ja, T är en ortogonalmatris.

c) $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + \sqrt{3}x_2)$, $y_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x_1 + x_2)$.

d) $A_f = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $A_e = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Anmärkning: Om man, som här, lyckas hitta en bas i vilken en linjär avbildnings matris blir en diagonalmatris, säger man att man har *diagonaliserat* avbildningen. Att hitta sådana baser är huvudnumret i nästa kapitel.

20. a) $\begin{pmatrix} \bar{f}_1 & \bar{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \end{pmatrix} T$, där $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Ja.

c) $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2)$.

d) $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

21. a) T.ex. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

b) $A_f = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

c) $A_e = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&0&-2\\0&5&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$

e) $B_f = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

f) $B_e = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&0&-4\\0&5&0\\-4&0&-3\end{pmatrix}$

g) $\left(-\frac{2}{5}, -1, -\frac{14}{5}\right)$

h) Du upptäckte väl att i detta fall är $F \circ G = G \circ F = F$, alltså samma som bara ortogonalprojektion?

22. $A_f = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, vilket är matrisen för ortogonalprojektion på första basvektorn, d.v.s. på linjen med $\bar{f}_1$ som riktningsvektor (och $\bar{f}_2$ som normal).

23. T.ex. avbildningen med matrisen $A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-2&3\\4&-1\end{pmatrix}$. Arean är 10.

Kapitel 8

1. $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$ och $\bar{u} \neq \bar{0}$.

2. Egenvärdena är de reella lösningarna λ till sekularekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$.

3. $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ egenvektor med egenvärde 1. $\begin{pmatrix}-1\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$ egenvektor med egenvärde -1.

4. Egenvektorerna $t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $t \neq 0$, har egenvärdet -3.

Egenvektorerna $t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $t \neq 0$, har egenvärdet 5.

5. a) Egenvärden 1 och 3 med egenvektorerna $t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ resp. $t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

b) Egenvärden (och därmed även egenvektorer) saknas.

c) Egenvärde $\frac{2}{3}$ med egenvektorerna $t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

6. a) Egenvärden 2, 1 och -1 med egenvektorerna

$$t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\, t\neq 0\,,\ t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\, t\neq 0\,,\ \text{resp. }\ t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\, t\neq 0\,.$$

c) Egenvärden -1 och 1 med egenvektorerna

$$t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\, t\neq 0\,,\ \text{resp. }\ t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ s,t \text{ ej båda } 0.$$

d) Egenvärden -4 och 3 med egenvektorerna

$$t\begin{pmatrix}-6\\8\\3\end{pmatrix},\, t\neq 0 \text{ resp. }\ t\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix},\, t\neq 0.$$

7. $F(-\bar{u}+2\bar{v}) = -2\bar{u}-2\bar{v}\,,$ $\quad F(2\bar{u}-\bar{v}) = 4\bar{u}+\bar{v}\,,$

$F^2(\bar{u}) = 4\bar{u}\,,$ $\quad F^5(\bar{v}) = -\bar{v}\,,$

$F^2(2\bar{u}+3\bar{v}) = 8\bar{u}+3\bar{v}\,,$

$F^{-1}(\bar{u}) = \frac{1}{2}\bar{u}\,,$ $\quad F^{-1}(2\bar{u}+3\bar{v}) = \bar{u}-3\bar{v}\,.$

8. Det måste finnas en bas bestående av egenvektorer till A.

9. Det finns en ON-bas av egenvektorer till en matris om och endast om matrisen är symmetrisk.

10. $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ (egenvärden med multiplicitet räknas flera gånger).

11. a) T.ex. $T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{2}{7}\end{pmatrix}$.
Kolumnerna i T utgör en ON-bas av egenvektorer.

b) T.ex. $T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1\\ \sqrt{2} & 0 & 2\end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
Kolumnerna i T utgör en ON-bas av egenvektorer.

12. Att matrisen A går diagonalisera följer från att den är symmetrisk.

T.ex. $D = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 5 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ och $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Egenvärdena är på diagonalen i D och T:s kolonner utgör en ON-bas av egenvektorer. $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} D = 10\,.$

13. F är ej symmetrisk eftersom egenvektorer hörande till skilda egenvärden ej är ortogonala. Avbildningsmatrisen blir $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\\-2 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

14. a) Om $\bar{n}$ är en normalvektor till Π så är vektorerna $t\,\bar{n}\,,\ t \neq 0\,$, egenvektorer med egenvärde 0. Alla nollskilda vektorer som är parallella med Π (alltså ortogonala mot $\bar{n}$) är egenvektorer med egenvärde 1.

$$D_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Som i a) men egenvärde -1 istället för 0 för vektorer parallella med $\bar{n}$.

$$D_G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Om $\theta = 0$ (ger identitetsavbildningen): Egenvärde 1 för alla vektorer.
Om $\theta = \pi$ (vridning ett halv varv): Vektorerna $t\,\bar{v}\,,\ t \neq 0\,$, är egenvektorer med egenvärde 1. Alla nollskilda vektorer som är ortogonala mot $\bar{v}$ är egenvektorer med egenvärde -1.
Om $\theta \neq 0, \pi$: Egenvärde 1 för vektorerna $t\,\bar{v}\,,\ t \neq 0\,$. Avbildningen är inte diagonaliserbar.

$$D_{H,\theta=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_{H,\theta=\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

15. a) $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \neq 0\,$, egenvärde 0. $t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, t, s ej båda 0, egenvärde 1.

b) T.ex. $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) F är ortogonalprojektionen i planet $x + 2z = 0$.

16. En sträckning en faktor 3 i riktningen $(1\ \ 2\ \ -2)^t$.

17. a) $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9^n + 1 & 9^n - 1 \\ 9^n - 1 & 9^n + 1 \end{pmatrix}$

b) Det finns fyra möjliga matriser B: $\pm\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $\pm\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

18. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$. b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$

19. a) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}$

b) T.ex. $X = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} - \sqrt{3} & 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} & 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Kapitel 9

1. $Q(x_1, x_2) = (x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2\,,$
med A, B, C konstanter.

2. a) Alla egenvärden är positiva. T.ex. $Q(x, y) = x^2 + y^2$.

b) Minst ett egenvärde är noll, de övriga är positiva. T.ex. $Q(x, y) = x^2$.

c) Det finns både positiva och negativa egenvärden. T.ex. $Q(x, y) = x^2 - y^2$.

3. a), c), d), e) och g) är kvadratiska former.

4. a) $Q(x, y) = (x \;\; y)\begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ 5/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) $Q(x, y, z) = (x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c) $Q(x, y, z) = (x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

6. a) $A = \begin{pmatrix} 7 & -3/2 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix}$

b) T.ex. $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ med egenvärden $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $\lambda_2 = \frac{15}{2}$.

c) T.ex. $T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 15/2 \end{pmatrix}$.

d) $Q(y_1, y_2) = Y^tDY = \frac{5}{2}y_1^2 + \frac{15}{2}y_2^2$.

$$X = TY \text{ , d.v.s. } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(y_1 - 3y_2) \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3y_1 + y_2) \end{cases} .$$

e) En ellips med centrum i origo samt halvaxellängder $\sqrt{\frac{2}{5}}$ och $\sqrt{\frac{2}{15}}$ i riktningarna $\bar{f}_1$ resp. $\bar{f}_2$.

f) En ellips med centrum i origo samt halvaxellängder $\sqrt{2}$ och $\sqrt{\frac{2}{3}}$ i riktningarna $\bar{f}_1$ resp. $\bar{f}_2$.

7. a) En ellips med centrum i origo samt halvaxlar $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ i riktningarna $(1 \;\; 1)^t$ resp. $(-1 \;\; 1)^t$.

b) En ellips med centrum i origo samt halvaxlar 1 och $\frac{1}{\sqrt{11}}$ i riktningarna $(2 \;\; 1)^t$ resp. $(-1 \;\; 2)^t$.

8. a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 15 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

b) T.ex. $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ med egenvärdena $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$ resp. $\lambda_3 = 15$.

c) T.ex. $T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$.

d) $Q = Y^t D Y = 5y_1^2 + 10y_2^2 + 15y_3^2$. $X = TY$, d.v.s. $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 - y_2) \\ x_2 = -y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 + 2y_2) \end{cases}$.

e) En ellipsoid med centrum i origo samt halvaxellängder $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$och $\frac{1}{\sqrt{15}}$ i riktningarna $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ resp. $\bar{f}_3$.

f) En ellipsoid med centrum i origo samt halvaxellängder 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\frac{1}{\sqrt{3}}$ i riktningarna $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ resp. $\bar{f}_3$.

9. a) En ellipsoid med centrum i origo samt halvaxellängder 1, $\sqrt{2}$ och 2 i riktningarna $(1\ \ 0\ \ 0)^t$, $(0\ \ 1\ \ -1)^t$ resp. $(0\ \ 1\ \ 1)^t$.

b) En ellipsoid med centrum i origo samt halvaxellängder $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{\sqrt{6}}$ i riktningarna $(1\ \ 1\ \ 1)^t$, $(1\ \ -1\ \ 0)^t$ resp. $(1\ \ 1\ \ -2)^t$.