Integraler–kort historik

Integralbegreppet är ett förnämligt verktyg för att kunna behandla och lösa såväl geometriska som fysikaliska problem. Hur började det?

Följande områden förebådade differential- och integralkalkylen:

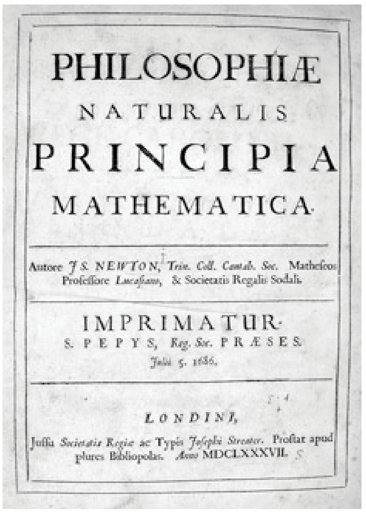
- Beskrivning av kroppars rörelser,
- Generella metoder för att bestämma kurvors tangenter/extrempunkter,
- Area- och volymberäkning.

Integralkalkylen tillhör nog 1600-talets största matematiska bidrag. Integralbegreppets upptäckare är Newton och Leibniz. Dessa utvecklade, oberoende av varandra, allmänna metoder för integralkalkylen.

Isaac Newton var först med att upptäcka att en area kunde bestämmas genom ”antiderivering”:

$$\frac{dA}{dx} = f(x).$$

Newton utförde kalkylerna på 1660-talet men publicerade sina resultat så sent som 1687 i monumentalverket ”Principia Mathematica”.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J. S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Gottfried Wilhelm Leibniz diskuterade i artikeln ”Nova methodus pro maximis et minimis. . . ”, publicerad 1684, begreppet ”calculus integralis”: $\int y\,dx$, som ”en summa av oändligt små element”.

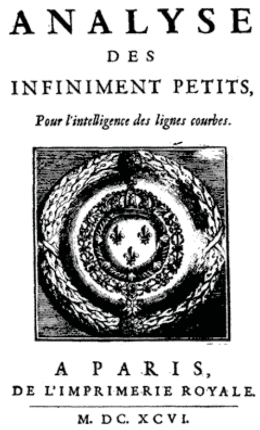
MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, vv, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dvv, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum vv, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales: TAB. XII.

Leibniz insåg även sambandet derivata / integral. Det är Leibniz som är skaparen av integraltecknet $\int$.

Guillaume de l'Hospitals "Analyse des Infiniment Petits" (tryckår 1696) är den första läroboken i differentialkalkyl.



Ungefär hundra år senare frigjorde sig analysen från geometrin. En av de bidragande orsakerna var fransmannen och arbetsnarkomanen (789 vetenskapliga uppsatser...) Louis Cauchys exakta integraldefinition från 1829:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

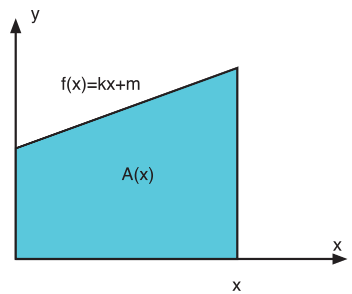
Gauss-studenten Bernhard Riemann gjorde i mitten på 1800-talet en generalisering av Cauchys integralbegrepp.

Sambandet derivata-integral

Antag att

$$f(x) = kx + m, \quad x \geqslant 0.$$

Bestäm arean av det färgade området som funktion av x. Finns något samband mellan denna area och $f(x)$?



I tidigare kurser har vi, utgående från funktionen $f(x)$, bestämt dess derivata $f'(x)$ med diverse metoder.

Exempel Antag att vi känner ett uttryck för den sträcka $s(t)$ som en kropp tillryggalägger. Då får vi kroppens fart $v(t)$ genom att derivera $s(t)$, dvs. $v(t) = s'(t)$.

Primitiv funktion

Antag att vi, utgående från ovanstående exempel, känner farten. Hur bestämmer vi då vägsträckan? Frågeställningar av denna typ utgör kärnan i detta avsnitt. Vi definierar:

Funktionen $F(x)$ är en primitiv funktion till funktionen $f(x)$ om

$$F'(x) = f(x) \quad .$$

Om funktionen $F(x)$ är en primitiv funktion till funktionen $f(x)$ så betecknar $F(x) + C$, där C är en godtycklig (reell) konstant, samtliga primitiva funktioner till $f(x)$.

Räkneregler

$$\int (Af(x) + Bg(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= A\int f(x)\,\mathrm{d}x + B\int g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C \qquad (2)$$

$$\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^2(x)}{2} + C \qquad (3)$$

Elementära primitiva funktioner

Följande tabell är en sammanställning av de primitiva funktioner som vi direkt erhåller ur de elementära derivatorna.

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \qquad (1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad (2)$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C \qquad (3)$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (4)$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad (5)$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad (6)$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C \qquad (7)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C \qquad (8)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (9)$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad (10)$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|u(x)| + C \qquad (11)$$

Tips: Jag rekommenderar att Du lär Dig dessa primitiva funktioner. Ladda hem ”Nyttiga samband” från Fronter.

Exempel

Sök samtliga primitiva funktioner till funktionerna:

- $f(x) = 4x^3 + \sin x$,
- $f(x) = \cos(k \cdot \pi x)$,
- $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Avslutande exempel

- Bestäm en primitiv funktion till $g(x) = \sin^2 x$.
- Funktionen $f(x)$ har minimivärdet 2. Dess derivata är $f'(x) = x^2 - 2x - 3$. Bestäm $f(x)$.
- $F(x)$ är en primitiv funktion till

$$f(x) = (x+3)^2.$$

Dessutom är $F(0) = 10$. Bestäm $F(x)$.