

M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, Lekt 2, V14

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Staffan Lundberg

M0043M V14

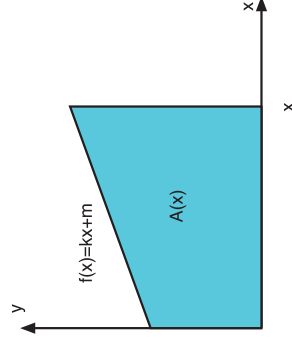
1/22

Lösningsförslag

$A(x)$ är ett parallelltrapets.

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x(m + kx + m)}{2} = \\ &= k \cdot \frac{x^2}{2} + mx. \end{aligned}$$

- Beräkna $\frac{d}{dx}A(x)$.



Staffan Lundberg

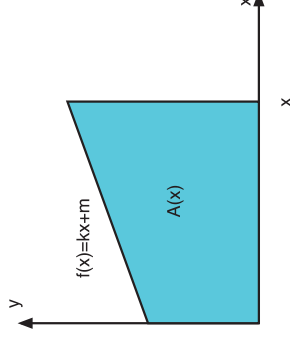
M0043M V14

3/22

Antag att

$$f(x) = kx + m, \quad x \geq 0.$$

Bestäm arean av det färgade området, $A(x)$, som funktion av x .



Staffan Lundberg

M0043M V14

2/22

Anmärkning

$$\frac{d}{dx}A(x) = \frac{d}{dx} \left(k \cdot \frac{x^2}{2} + mx \right) = kx + m.$$

Uppenbarligen gäller att $\frac{d}{dx}A(x) = f(x)$. Detta är ingen tillfällighet. Vi återkommer.

Staffan Lundberg

M0043M V14

4/22

Inledning

När man deriverar en produkt får man

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

Det innebär att $u \cdot v$ kan tolkas som en primitiv funktion:

$$u \cdot v = \int (u' \cdot v + v' \cdot u) dx.$$

Integrationsmetoder: Partiell integration

Vi sätter $f(x) = u'(x)$ resp. $g(x) = v(x)$ och formulerar:

Antag att F är en primitiv funktion till f . Då gäller

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx.$$

Denna metod förutsätter att integranden kan tolkas som en produkt $f(x) \cdot g(x)$.

Detta kan alternativt formuleras:

$$\int u' \cdot v dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx.$$

Vi använder denna tankegång för att beräkna

$$\int e^x \cdot x dx. \quad (u' = e^x, v = x)$$

Normalfallet

Vi inser att partiell integration är relevant endast om metoden leder till *enklare* kalkyler än den ursprungliga.

Normalt väljs potensuttryck som den funktion man skall derivera – en derivering är ju – i detta fall – en gradtalssänkning och därmed en förenkling.

Att så inte alltid är fallet visas i följande exempel.

Exempel

$$\int x^2 \cdot \ln x \, dx = \quad (\text{Här måste vi integrera potensfunktionen})$$

$$\begin{aligned} f &= x^2 \Rightarrow F = x^3/3 \\ g &= \ln x \Rightarrow g' = 1/x \end{aligned}$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^2}{9} + C.$$

Exempel

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx =$$

$$\begin{aligned} f &= \cos x \Rightarrow F = \sin x \\ g &= x^2 \Rightarrow g' = 2x \end{aligned}$$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x \, dx = \quad (\text{Andra varvet})$$

Anmärkning

Valet är självklart. Vi kan inte enkelt integrera $\ln x$, men vi har omedelbart derivatan av $\ln x$.

Ibland måste den partiella integrationen utföras iterativt, enligt följande exempel.

Andra varvet

$$\begin{aligned} f &= \sin x \Rightarrow F = -\cos x \\ g &= 2x \Rightarrow g' = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x^2 \sin x - \left(2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) \, dx \right) = \\ &= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C. \end{aligned}$$

Viktigt exempel

Bestäm

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx.$$

Här går det inte att eliminera någon av faktorerna. Vi skall trots det integrera partiellt.

- Oväsentligt vilken funktion man väljer att integrera/derivera.
- Iterera tills ursprunglig integral framträder.

Avslutande exempel

Bestäm

$$\int x \cdot \arctan x \, dx.$$

Försök på egen hand

Bestäm

$$I = \int x^2(x^2 - 2)^5 \, dx$$

Lösningsförslag–tjuvkika inte

$$I = \int x^2(x^2 - 2)^5 \, dx =$$

$$\begin{aligned} f = x^2 &\Rightarrow F = x^3/3 \\ g = (x^2 - 2)^5 &\Rightarrow g' = 5(x^2 - 2)^4 \cdot 2x \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot (x^2 - 2)^5 - \int \frac{x^3}{3} \cdot 5(x^2 - 2)^4 \cdot 2x \, dx. \end{aligned}$$

Upprepad partiell integration

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^3}{3}(x^2 - 2)^5 - \left\{ \frac{2}{3}(x^2 - 2)^4 x^5 - \left(\frac{16}{21}(x^2 - 2)^3 x^7 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{32}{63}(x^2 - 2)^2 x^9 - \left[\frac{128}{693}x^{13} - \frac{256}{693}x^{11} - \frac{256}{9009}x^{13} \right] \right) \right\} = \\ &= \dots = \frac{1}{13}x^{13} - \frac{10}{11}x^{11} + \frac{40}{9}x^9 - \frac{80}{7}x^7 + 16x^5 - \frac{32}{3}x^3 \end{aligned}$$

Lösningsförslag-tjuvkika inte

$I = I_1 + I_2$, där

$$I_1 = \int \cos u \cdot u^{(3)} dx, \quad I_2 = \int \cos u \cdot \frac{(u')^3}{2} dx.$$

Överkurs-betonat exempel: Läs (och lös) på egen hand

Beräkna följande integral med hjälp av partiell integration. Låt $u(x)$ vara en minst tre gånger deriverbar funktion.

$$I = \int \cos u \cdot \left(u^{(3)} + \frac{(u')^3}{2} \right) dx.$$

Integralen I_1

$$I_1 = \int \cos u \cdot u^{(3)} dx =$$

$$\begin{aligned} f &= u^{(3)} \Rightarrow F = u'' \\ g &= \cos u \Rightarrow g' = \underbrace{-\sin u \cdot u'}_{\text{Kedjeregeln}} \end{aligned}$$

$$= \cos u \cdot u'' - (-1) \cdot \underbrace{\int \sin u \cdot u' \cdot u'' dx}_{= I_3}$$

$$\int \sin u \cdot u' \cdot u'' \, dx =$$

$$f = u' \cdot u'' \Rightarrow F = \frac{(u')^2}{2}$$

$$g = \sin u \Rightarrow g' = \cos u \cdot u'$$

$$= \frac{(u')^2}{2} \cdot \sin u - \int \frac{(u')^2}{2} \cdot \cos u \cdot u' \, dx.$$

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = \\ &= \cos u \cdot u'' + \frac{(u')^2}{2} \cdot \sin u - \int \frac{(u')^2}{2} \cdot \cos u \cdot u' \, dx + \\ &+ \int \cos u \cdot \frac{(u')^3}{2} \, dx = \cos u \cdot u'' + \frac{(u')^2}{2} \cdot \sin u + C. \end{aligned}$$