

M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, Lekt 3, VT14

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Integrationsmetoder: Variabelbyte

Analysens huvudsats kan ses som ett sorts "skelett", på vilket man tillfogar diverse metoder - allt i syfte att göra integralberäkningen smidigare.

Vi inleder med att betrakta en av dessa metoder, nämligen variabelbytet. Antag att $F(g(x))$ är en primitiv funktion till $f(g(x))$. Vi deriverar med kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Bestäm

$$\int x^3 (\ln x)^2 dx.$$

Detta betyder att

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Vi får emellertid samma resultat om vi beräknar

$$\int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C,$$

där vi sätter $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$.

Exempel

Varför gör man ett variabelbyte? Den främsta orsaken är väl att åstadkomma en primitiv funktion som är enklare att beräkna än den ursprungliga.

Variabelbytet som metod, ofta i kombination med en primitiv funktion ur tabellen med standardprimitiver, tillhör vardagssysslorna när det gäller integrering.

Beräkna

$$\int (x^2 - 1)^2 \cdot 2x \, dx$$

- genom att kvadrera och multiplicera in faktorn $2x$,
- genom att göra variabelbytet $u = x^2 - 1$.

Exempel

Beräkna

- $\int \sin x \cos x \, dx$,
- $\int x^2 \sqrt{x^3 + 4} \, dx$.

Speciella manipuleringar

Ibland måste man skriva om integranden på ett eller annat sätt, innan vi sätter variabelbytet i arbete.

I nedanstående exempel redovisas en ofta använd teknik - [kvadratkompletteringen](#).

Exempel Beräkna

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} \, dx \quad .$$

Förslag till lösning

Kvadratkomplettera nämnaren:

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \quad (\text{Känns detta avlägset--repetera Matte 1})$$

gör därefter lämpligt variabelbyte.
Fullfölj kalkylerna som nyttig övning.

Staffan Lundberg

M0043M V14

10/ 15

Lösningsförslag

Vi sätter $u = \sqrt{x - 4}$ och löser ut x som funktion av u :

$$\int x\sqrt{x-4} \, dx =$$

$$u = \sqrt{x-4} \Rightarrow x = u^2 + 4$$

$$dx = 2u \, du$$

$$\int (u^2 + 4) u \, 2u \, du \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Övn.}}$$

$$(\text{Svar } 2/5(x-4)^{5/2} + 8/3(x-4)^{3/2} + C)$$

Staffan Lundberg

M0043M V14

12/ 15

Funktionssamband

Ibland är det lämpligt att införa variabelbytet via ett (inverterbart) funktionssamband.

Exempel Beräkna

$$\int x\sqrt{x-4} \, dx \quad .$$

Staffan Lundberg

M0043M V14

11/ 15

Anmärkning

Eftersom det är fråga om obestämda integraler (dvs. primitiva funktioner), avslutas det hela med att

återgå till den ursprungliga variabeln x .

Staffan Lundberg

M0043M V14

13/ 15

Vi sätter $u = 1 + \sqrt{x}$ och löser ut x som funktion av u :

$$\int_0^1 \cos(1 + \sqrt{x}) dx.$$

Beräkna

$$\int_0^1 \cos(1 + \sqrt{x}) dx.$$

$$u - 1 = \sqrt{x} \Rightarrow x = (u - 1)^2$$

$$dx = 2(u - 1) du$$

$$\text{Gränser } x = 0 \rightarrow u = 1, \quad x = 1 \rightarrow u = 2$$

$$2 \int_1^2 \cos(u) \cdot (u - 1) du \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Övn.}}$$

(Svar 2 (sin(2) + cos(2) - cos(1)))