

Lekt 5

M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, Lekt 6, V14

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Staffan Lundberg

M0043M V14

1/11

Funktionssamband

Under Lekt 3 tittade vi på ett speciellt variabelbyte. Det (inverterbara) funktionssambandet.

Exempel Beräkna

$$\int e^{\sqrt{x}} dx .$$

Bestäm

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^8 x dx.$$

Staffan Lundberg

M0043M V14

3/11

Lösningsförslag

Vi sätter $u = \sqrt{x}$ och löser ut x som funktion av u :

$$\int e^{\sqrt{x}} dx =$$

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \\ dx = 2u du$$

$$\int e^u 2u du \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Övn.}}$$

$$(\text{Svar } 2 (\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}} + C)$$

Staffan Lundberg

M0043M V14

4/11

Staffan Lundberg

M0043M V14

5/11

Anmärkning

Eftersom det är fråga om obestämda integraler (dvs. primitiva funktioner), avslutas det hela med att

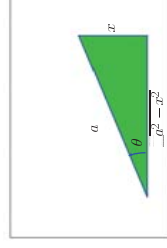
återgå till den ursprungliga variabeln x .

Integraler som innehåller $\sqrt{a^2 - x^2}$

$\sqrt{a^2 - x^2}$ tolkas som en av kateterna i en "hjäppriangel".

$$a \sin \theta = x, \quad dx = a \cos \theta d\theta$$

$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$ (Anm Vi antar $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$)



Inverterbara trigonometriska variabelbyten

- $x = a \sin \theta$
- $x = a \tan \theta$

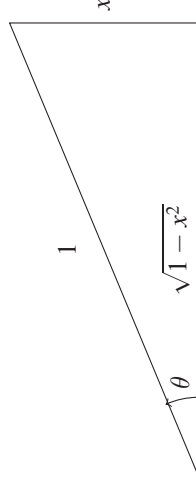
ger oss möjlighet att bestämma en del knepiga integraler.

Exempel

Bestäm

$$\int x \cdot \arcsin(x) dx$$

Substitutionen $\theta = \arcsin x$ är användbar.



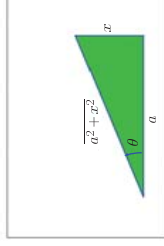
Integraler som innehåller $\sqrt{a^2 + x^2}$

$\sqrt{a^2 + x^2}$ tolkas som hypotenusan i en "hjälptriangel".

$$a \tan \theta = x, dx = a \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

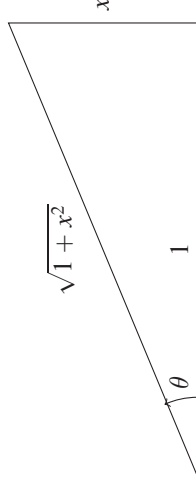


Avslutande exempel

Bestäm

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$$

Använd substitutionen $x = \tan \theta$.



$$C + \left(\frac{x^2+1}{x} - x \arctan x \right) \frac{1}{2} + \text{const}$$

Anm. Vi antar $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$