M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, Lekt 5, V14

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Lekt 4

Bestäm

$$\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Att integrera trigonometriska uttryck

Genom att nyttja speciella variabelbyten och diverse trigonometriska formler, kan integralen av ett trigonometriskt uttryck ge enklare kalkyler.

Exempel Beräkna

- $\int \cos^2 x(-\sin x)\,\mathrm{d}x$,

Vanliga variabelbyten

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} \sin x &= t, \\ dt &= \cos x\,\mathrm{d}x \end{aligned}} = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} \cos x &= t, \\ dt &= -\sin x\,\mathrm{d}x \end{aligned}} = -\int f(t)\,\mathrm{d}t$$

Vanliga omskrivningar

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Beräkna

- $\int \cos^2 x \, dx$.

Mindre vanliga omskrivningar

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)$$
$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$$
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big)$$

Exempel

Bestäm

$$\int \sin(x) \cdot \cos(2x) \, dx$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)$$
$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$$
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big)$$

Exempel

Beräkna integralen

$$\int \cos^3 2x \cdot \sin 2x \, dx$$

Avslutande exempel – litet knepigare

Beräkna integralen

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

Lösningsförslag

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int \frac{1}{1+\tan x}\,dx = \dots$$

$$u = \tan x, \quad \frac{du}{dx} = 1 + \tan^2 x$$

$$dx = \frac{du}{1+u^2}$$

Att läsa och lösa själv: Reduktioner

Att beräkna integralen $\int \sin^{10} x\,dx$ ter sig rätt så mödosamt. Av detta skäl har man tagit fram s.k. reduktionsformler, vilka underlättar räknandet högst väsenligt.
Vi antar att $n \in \mathbb{Z}_+$.

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

Vi härleder formeln.

Härledning

$$I = \int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x \sin x\,dx = \quad \text{(Part. int.)} =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + \int \cos^2 x (n-1) \sin^{n-2} x\,dx = \quad \text{(Trig. ettan)} =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,dx =$$

Forts.

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)I \quad \text{(Förenkla)}$$

$$I + (n-1)I = nI = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx$$

$$I = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

Anm För $\int \cos^n x\,dx$ finns analoga reduktioner.

Exempel

Bestäm

$$\int \sin^4 x\,dx \quad \text{på ena eller andra sättet.}$$

- $\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \ldots$
- Reduktion

Lösningsförslag–Reduktion

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

Sätt $n = 4$ i ovanstående formel

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx \quad \text{(Trig. omskrivn.)} =$$

$$-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = -\frac{1}{8}\sin^2 x \sin 2x + \frac{3}{8}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1-\cos 2x}{16}\sin 2x + \frac{3x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x =$$

$$= -\frac{\sin 2x}{16} + \frac{\sin 4x}{32} + \frac{3x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x =$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$$