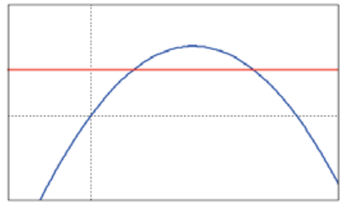
M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, Lekt 8, V14

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Lekt 7

Bestäm den eller de punkter på intervallet $I : 0 \leqslant x \leqslant 1$ i vilka $f(x) = 2x(1-x)$ är lika med funktionens medelvärde på I.



Riemanns och Newtons integraler

Vi ska i denna lektion beröra sambandet mellan Riemann- och Newtonintegralen.
Vi observerar att dessa två integraler har sitt ursprung i två skilda förhållningssätt.
Riemannintegralen ger alltid ett tal som resultat. Talet tolkas som en area.
Newtonintegralen däremot, ger primitiva funktioner som resultat.

Det innebär att Riemannintegralen är geometrisk, medan Newtonintegralen är algebraisk. Trots dessa grundläggande skillnader, råder ett intimt samband mellan de två integralbegreppen.

Analysens huvudsats–Kopplingen mellan derivata och integral

Denna viktiga räkneregel – vars ursprung finns i Newtons antiderivering – ger ett samband mellan derivata och integral.
Nu slipper vi använda Riemannsummor, utan räknearbetet förenklas högst avsevärt.
Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i intervallet $a \leqslant x \leqslant b$ och att funktionen F är en primitiv funktion till funktionen f, dvs $F'(x) = f(x)$.
Då gäller

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \quad .$$

Satsen säger att den sökta integralens värde bestäms genom att

- Bestämma en primitiv funktion $F(x)$,
- Beräkna den primitiva funktionens värden i intervalländpunkterna,
- Beräkna differensen mellan dessa funktionsvärden.

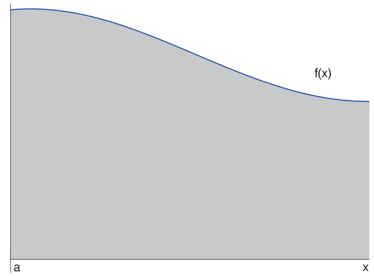
Definition av areafunktion

Antag att $f(x) \geqslant 0$.

Vi definierar areafunktionen

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \geqslant a, \quad (1)$$

som motsvaras av det skuggade området i figuren.



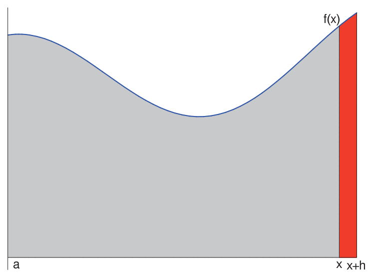
På ett intuitivt sätt skall vi nu beskriva sambandet mellan areafunktionen $A(x)$ och kurvfunktionen $f(x)$.

Intuitivt bevis

Vi skall visa att A är en primitiv funktion till f, dvs $A'(x) = f(x)$.

Derivatans definition:

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} =$$
$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t. \quad (2)$$



Räkneruta

IMVS på (2) gör att vi kan ersätta täljaren enligt

$$\frac{\overbrace{A(x+h) - A(x)}^{\text{Markerad area}}}{h} = \frac{f(c) \cdot (x+h-x)}{h} = f(c),$$

där c ligger mellan x och $x+h$.

Låt $h \to 0$, vilket medför att $c \to x$. Eftersom f är kontinuerlig, innebär detta att $f(c) \to f(x)$. Alltså är areafunktionen $A(x)$ deriverbar med

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

dvs. $A(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$.

Exempel

Beräkna

- $\displaystyle\int_0^1 (2x + 6x^4 + 5)\,\mathrm{d}x$,
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3+1}{x^2}\,\mathrm{d}x$,
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x$,
- $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$.

Bestämda integraler och variabelbyte

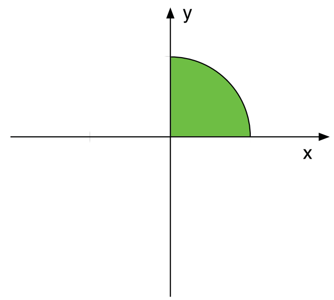
Antag att $f(g(x)) \cdot g'(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$. Låt F vara en primitiv funktion till f. Då är

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \quad .$$

Anm: Observera att vi inte gör tillbakabyte till den ursprungliga variabeln x. Vi får nya gränser när vi byter integrationsvariabel. ”Bytt är bytt” när det gäller bestämda integraler.

Exempel

Beräkna arean A av en cirkel med radien R.



Cirkelns ekvation (med origo i cirkelns centrum):

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

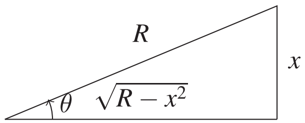
Lösningsförslag

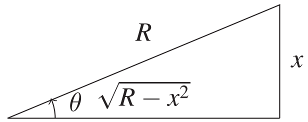
Av symmetriskäl gäller att den sökta arean är 4 gånger arean av den markerade cirkelsektorn. Detta kan uttryckas som

$$A = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Vi betraktar intervallet $0 < \theta < \pi/2$ och sätter

$$x = R\sin\theta,$$





$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$x = R\sin\theta,\quad \mathrm{d}x = R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$0 \to 0, R \to \pi/2$$

$$= \int_0^{\pi/2} R\cos\theta\, R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} R^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \quad \ldots$$

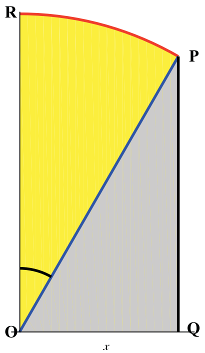
Här måste vi modifiera integranden med hjälp av en ofta använd trigonometrisk omskrivning, där ”cos-kvadraten” omvandlas till ”cos för dubbla vinkeln” . Fullborda exemplet som nyttig övning.

Exempel

Bestäm

$$\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

med ett arearesonemang.

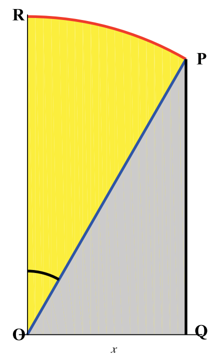


Vi noterar att den sökta arean indelas i två delareor:

- Cirkelsektor ORP, radie $OR = 2$, vinkel $O = \pi/6$.
- Rätvinklig triangel OPQ.

Lösningsförslag

- Sektor ORP, area= $\dfrac{2\arcsin(1/2)\cdot 2}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.
- Triangel OPQ, area=$\dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{2}$.
- Totalarea=$\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6}$.

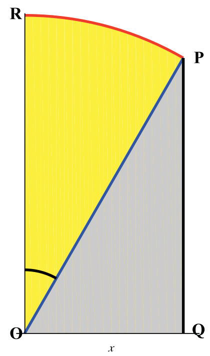


Variabelbytet $x = 2\sin t$

Beräkna

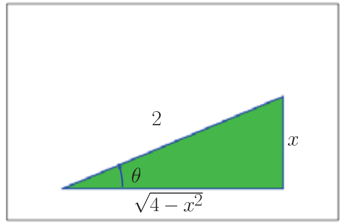
$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

med hjälp av rubricerat variabelbyte.
Nu behövs ingen uppdelning av området $ORPQ$.



Hjälptriangel

$\sqrt{4-x^2}$ tolkas som en av kateterna i en "hjälptriangel".



$$\sin\theta = x/2, \quad dx = 2\cos\theta\,d\theta$$
$$\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$$

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/6} 2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta \quad \text{(osv...)}$$

Avslutande exempel

Beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^4}\,dx$$

Svar: $\frac{1}{12}$

Att lösa på egen hand

Lös integralen

$$\int_0^{1/2} \cos(\pi x)\cdot \mathrm{e}^{2\sin(\pi x)}\,\mathrm{d}x.$$

Svar: $\frac{1}{2\pi}\left(e^2-1\right)$

Lös på egen hand

Bestäm medelvärdet av

$f(x) = e^{-x} + \cos x$ på intervallet $[-\pi/2, 0]$. (Svar: $2/\pi \cdot e^{\pi/2}$)