

Lekt 6

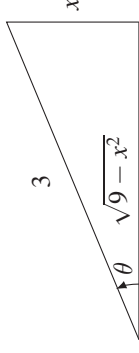
■ Bestäm

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$$

Använd substitutionen $x = 3 \sin \theta$ samt utnyttja

$$\cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1$$

$$\frac{d}{dx} (\cot \theta) = -\frac{1}{\sin^2 \theta}$$



M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, Lekt 7, V14

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Staffan Lundberg

M0043M V14

1/22

Areaproblemet

Under Lekt 1 nämnde vi att bl. a. area- och volymberäkning föråbådade differential- och integralkalkylen. Vi berörde också Newtons banbrytande upptäckt att en area kunde bestämmas genom "antiderivering".

Exempel Bestäm arean av det område som begränsas av funktionskurvan

$$y = x^2 + 3 \quad ,$$

x -axeln samt linjerna $x = 0$ respektive $x = 4$.

Staffan Lundberg

M0043M V14

2/22

Steg 1

Vi delar in intervallet i ett ändligt antal delar (som inte behöver vara lika stora, men av bekvämlighetsskäl gör vi så - här väljer vi 12 lika stora delar) (denna indelning kallas *partitionen P*).

Därefter bilar vi delrektanglar med basen $\Delta x = 1/3$ och höjden i varje delrektangel väljs som funktionsvärdet i delintervallens vänstra ändpunkt.

Staffan Lundberg

M0043M V14

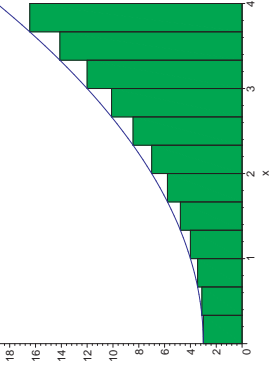
3/22

Staffan Lundberg

M0043M V14

4/22

Steg 2

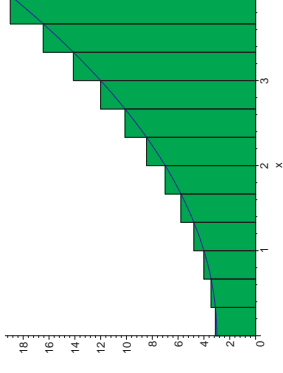
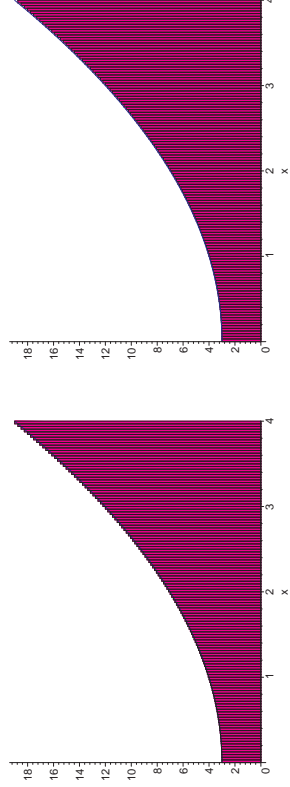


Vi approximerar därefter den sökta arean med totala summan av våra åtta rektanglareor. Denna summa kallas *undersumma* och betecknas $L(f, P)$.

Den sammanlagda rektangelarean blir ungefär 30.7 areaenheter.

Steg 3

Nu upprepar vi proceduren, men med fler delningspunkter. Vi väljer en partition som delar intervallet i 128 delintervall. Basen i varje delrektangel förkortas därmed. I övrigt föreligger inga skillnader jämfört med Steg 1 och 2.



Nu upprepar vi proceduren. Denna gång bildar vi delrektanglar med basen där höjden i varje delrektangel väljs som funktionsvärdet i delintervallens högra ändpunkt.

Vi approximerar därefter den sökta arean med totala summan av våra åtta rektanglareor. Denna summa kallas *översumma* och betecknas $U(f, P)$. Den sammanlagda rektangelarean blir ungefär 36.07 areaenheter. Vi konstaterar:

$$L(f, P) \leq \text{sökt area} \leq U(f, P).$$

Vi noterar att delrektanglarna allt bättre ansluter sig till den sökta arean. Undersumman blir ungefär 33.08, medan översumman blir approximativt 33.58 areaenheter.

Så fortsätter proceduren. När antalet delrektanglar går mot oändligheten (dvs. när längden av en delrektangelns bas, Δx , närmar sig noll), kan vi göra följande definition:

Definition

Antag att funktionen $f(x)$ är definierad i intervallet $a \leq x \leq b$. Gör en indelning av $[a, b]$ i ett ändligt antal delningspunkter

$$P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\} ,$$

där $x_0 = a$ och $x_n = b$. Välj punkter l_i och u_i i varje delintervall, och bilda *Riemann(under)summan*

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n f(l_i) \Delta x_i .$$

Viktigt gränsvärde

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(l_i) \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(u_i) \Delta x_i = \\ &= I = \int_a^b f(x) dx . \end{aligned}$$

Anm Exakta areavärdet i vårt exempel är $100/3 \approx 33.33$.

Bilda sedan *Riemann(över)summan*

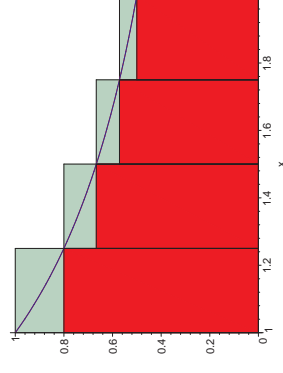
$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n f(u_i) \Delta x_i .$$

Låt $n \rightarrow \infty$. Om Riemannsummorna konvergerar mot ett gemensamt gränsvärde I , kallas detta gränsvärde *integralen* av f mellan a och b :

Exempel

Använd "trappfunktionerna" i nedanstående figur för att visa att

$$0.63 \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq 0.76 .$$



Antag att f och g är integrerbara över $[a, b]$. Då gäller

$$\begin{aligned} \int_a^b (Af(x) + Bg(x)) dx &= \\ &= A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) \text{ i } [a, b] &\Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &\leq \int_a^b g(x) dx, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad (4)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (5)$$

Integralkalkylens medelvärdessats (IMVS)

Vi känner nog till att det aritmetiska medelvärdet A av n positiva tal a_1, \dots, a_n kan skrivas

$$A = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Antag att vi har en godtycklig kontinuerlig funktion f på ett slutet intervall $[a, b]$. Vi delar in $[a, b]$ i n lika stora delintervall av längd $\Delta x = (b - a)/n$.

Låt oss beräkna funktionsvärdet $f(x_k)$ i varje delintervall. Medelvärdet av dessa funktionsvärden är

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} &= \\ \text{Riemannsumma för } f \text{ på } [a, b] &= \frac{\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x}{b - a}. \end{aligned}$$

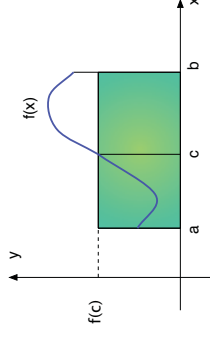
Om vi låter antalet delintervall gå mot oändligheten, konvergerar detta medelvärde mot en integral.

Definition

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$. Då existerar en punkt c , $a \leq c \leq b$, sådan att

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c) .$$

Talet $f(c)$ betecknas ofta \bar{f} och kallas *medelvärde* av f på $[a, b]$.



Anmärkning

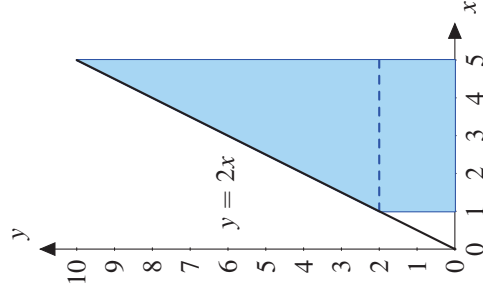
En fysikalisk tolkning av satsen: Anta att ett föremål rör sig med (icke-negativa) farten $v(t)$ under tidsintervallet $a \leq t \leq b$. Den tillryggalagda sträckan är $\int_a^b v(t) dt$.

Medelvärdesatsen säger: Den tillryggalagda sträckan under tidsintervallet $a \leq t \leq b$ är lika med medelfarten gånger tiden.

$$\int_a^b v(t) dt = \bar{v} \cdot (b - a).$$

Exempel

Bestäm medelvärde av $f(x) = 2x$ på intervallet $[1, 5]$.



Avslutande exempel

Beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t dt .$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t dt &= \quad (\text{IMVS}) \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{c}\right)^c = \quad (n \leq c \leq n+1) \\ &= e^x \quad (\text{Standardgränsvärde 3.11 (e)}) \end{aligned}$$

Bestäm medelvärdet av

$$f(x) = e^{-x} + \cos x \quad \text{på intervallet } [-\pi/2, 0].$$

$\mathcal{Z}/\mathcal{M}^{\text{P}} \cdot \mathcal{M}/\mathcal{Z} : \text{BMS}$