M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, Lekt 9, V14

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Lekt 8

Beräkna

$$\int_1^3 x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$$

Använd variabelbytet (a) $u = x^2 - 1$, (b) $u^3 = x^2 - 1$.

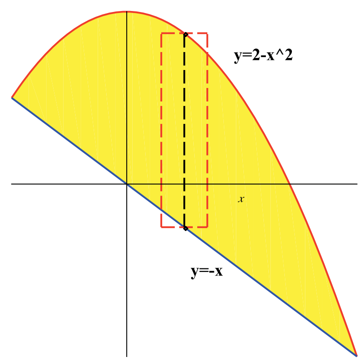
Area mellan två kurvor

Antag att $f(x) \geqslant g(x)$ för x mellan a och b. Då har området, begränsat av funktionskurvorna samt de vertikala linjerna $x = a$ och $x = b$, arean

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Exempel

Bestäm arean av området som omsluts av parabeln $f(x) = 2 - x^2$ och linjen $g(x) = -x$.

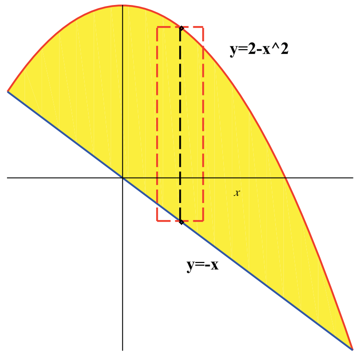


Markerad rektangelarea:

$$\Delta A_k = [f(c_k) - g(c_k)] \cdot \Delta x_k \quad \text{(Term i Riemannsumma)}$$

Lösningsförslag

Låt områdets area betecknas med A.



Bestäm skärningspunkter mellan funktionskurvorna:

$$2 - x^2 = -x, \quad \text{som har lösningarna } x = -1, x = 2.$$

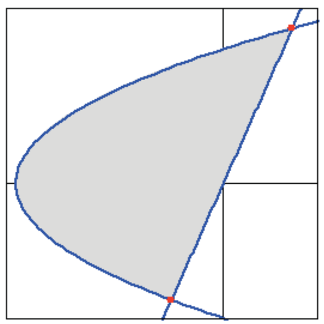
Beräkna A med hjälp av definitionen.

$$A = \int_{-1}^{2} (2 - x^2 - (-x))\,\mathrm{d}x = \quad \text{(Övre minus undre)}$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \ldots = \frac{9}{2}.$$

Exempel

Beräkna arean av området inneslutet parabeln $y^2 = x + 12$ och linjen $y = x$ enligt figuren.



Svar $343/6$ areaenheter.

Areaberäkningar, forts

Vi vet sedan tidigare, att om $f(x)$ är positiv, så kan vi tolka varje term $f(x_k)\,\Delta x$ (som ingår i Riemannsumman) som en rektangelarea. Med tidigare resonemang definierar vi:

Om $f(x) \geqslant 0$ och $a < b$ gäller:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$=$ Arean under grafen till f mellan a och b.

Vad händer om $f(x)$ inte alltid är positiv?

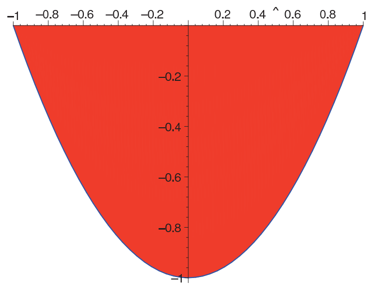
OBS: Arean av ett område är alltid positiv.

Vi betraktar följande exempel:

Vad är relationen mellan integralen

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x$$

och arean A av området begränsat av x-axeln och parabeln $x^2 - 1$?



Lösningsförslag

Den sökta arean A ligger mellan två kurvor: ”Överfunktionen” $y = 0$ (dvs. x-axeln) respektive ”underfunktionen” $y = 1 - x^2$. I vårt exempel blir den sökta arean:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(0 - (x^2 - 1)\right)\,\mathrm{d}x = \ldots \approx 1,33.$$

Vi beräknar därefter integralen

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right)\,\mathrm{d}x = \ldots \approx -1,33.$$

Vi konstaterar: $\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right)\,\mathrm{d}x = -A.$ Vad betyder detta?

Tolkning

Ur exemplet drar vi följande viktiga slutsats: Antag att $f(x)$ antar såväl positiva som negativa värden i ett intervall. Då kan integralen

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

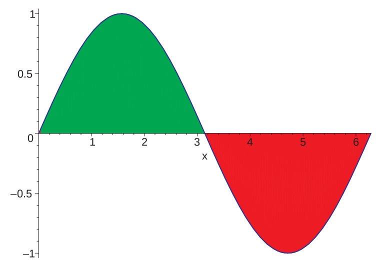
tolkas som en nettoarea.

Nettoarea

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 \quad ,$$

där A_1 är arean av området ovanför x-axeln, medan A_2 är arean av området nedanför x-axeln.

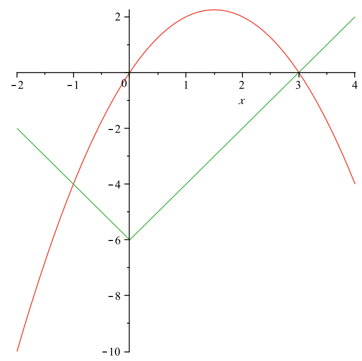
Observera att integralen (1) kan anta såväl positiva som negativa värden.



Exempel

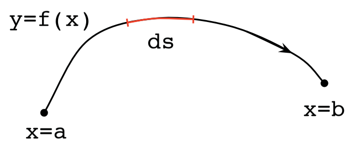
Bestäm arean av det plana område som omsluts av kurvorna

$y = 3x - x^2$ och $y = |2x| - 6$



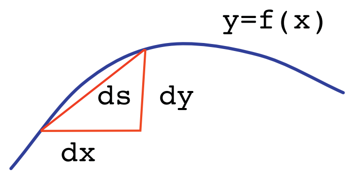
Tillämpningar: Båglängd av funktionskurva

Antag att en partikel rör sig längs en funktionskurva $C : y = f(x), a \leqslant x \leqslant b$. Vi vill beräkna längden s av kurvan C.

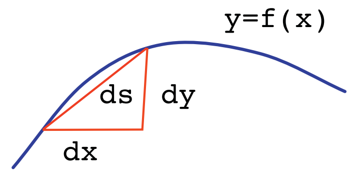


Alternativ 1

Vi betraktar en infinitesimal (oändligt kort och därmed närapå rätlinjig) bit av kurvan.



Vi bildar en rätvinklig triangel



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{(Pytagoras sats)}$$

$$ds^2 = dx^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Båglängden

Detta ger

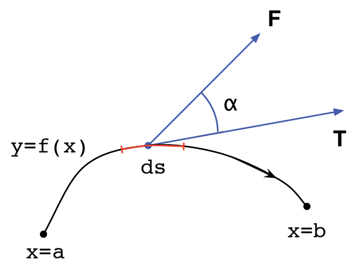
$$s = \int \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Alternativ 2 Parameterframställning

Vi parameterframställer funktionskurvan

$$C : \begin{cases} x &= t, \qquad a \leqslant t \leqslant b \\ y &= f(t) \end{cases} \qquad \text{eller} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Kurvans tangentvektor $\mathbf{T}$, uttryc-
ker vi som derivatan $\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$



Båglängden

Båglängden $\mathrm{d}s = |\dot{\mathbf{r}}|\,\mathrm{d}t = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$ (Tänk $s = v \cdot t$).
Detta ger

$$s = \int \mathrm{d}s = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Avslutande exempel

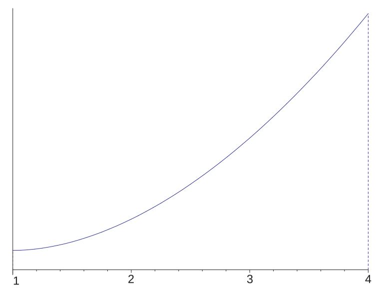
Bestäm längden av kurvan

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad 1 \leqslant x \leqslant \ln 8.$$

Lös på egen hand

Bestäm längden av kurvan

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}\,,\ 1 \leqslant x \leqslant 4 = \quad .$$



Lösningsförslag (tjuvkika inte)

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx =$$

$$= \ldots = \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx$$

$$s = \int_1^4 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right]_1^4 = \frac{1}{2}\left(3/2 + \ln 4\right).$$

Alternativ härledning av båglängden

Vi betraktar en plan funktionskurva

$$C : y = f(x), a \leqslant x \leqslant b.$$

Vi vill bestämma kurvans längd.

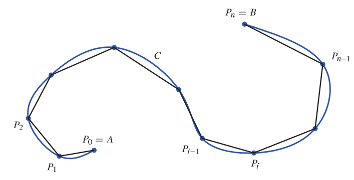
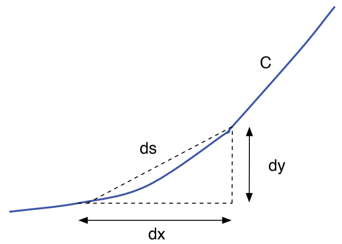


Figure 7-21

Vi börjar med att approximera funktionskurvan med ett s.k. polygontåg $P_0P_1 \cdots P_n$.

Vi antar att kurvbiten mellan P_{i-1} och P_i har längd L_i. Vi approximerar L_i med räta linjestycket $\mathrm{d}s$.



Pythagoras sats på den rätvinkliga differentialtriangeln ger

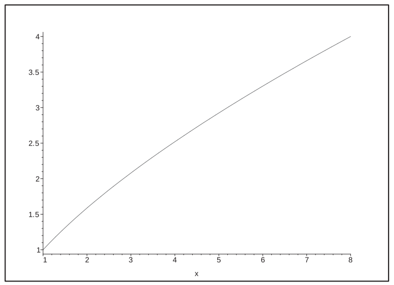
$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \quad .$$

Vi summerar dessa bidrag, som slutligen ger den sökta båglängden som en integral:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

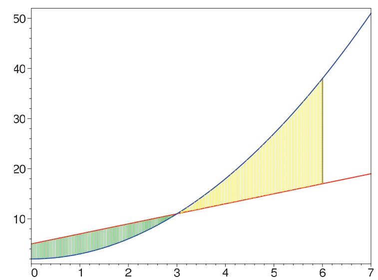
Lös på egen hand

Beräkna längden av kurvan $y = x^{2/3}$ mellan $x = 1$ och $x = 8$. (Svar $(40\sqrt{40} - 13\sqrt{13})/27$)



Läs och lös på egen hand

Beräkna arean av området i första kvadranten, begränsat av parabeln $y = x^2 + 2$ samt linjerna $y = 2x + 5$, $x = 0$ samt $x = 6$.



Lösningsförslag–tjuvkika inte

Området består av två delar. Bestäm skärningspunkten mellan funktionskurvorna, dvs. lös ekvationen

$$x^2 + 2 = 2x + 5 \quad ,$$

som har lösningen $x = 3$ i vårt definitionsområde.

Beräkna delareorna med hjälp av vår tidigare definition, och summera därefter.

$$A_1 = \int_0^3 (2x + 5 - (x^2 + 2))\,\mathrm{d}x = \ldots = 9 \text{ respektive}$$

$$A_2 = \int_3^6 (x^2 + 2 - (2x + 5))\,\mathrm{d}x = \ldots = 27.$$

Sökta arean: $A_1 + A_2 = 36$.