

M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, Lekt 10, V14

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

Tillämpningar: Beräkning av volymer

Vi låter Ω beteckna en kropp i rummet, med egenskapen att arean av ett godtyckligt plant snitt vinkelrätt mot en viss linje är en kontinuerlig funktion av snittets läge.

Vi väljer x -axeln till denna linje och betecknar snittarean med $A(x)$. Vi antar vidare att kroppen är belägen mellan planen $x = a$ och $x = b$.

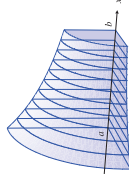


Figure 2

Betrakta räta linjen $y = kx + m$, $a \leq x \leq b$.

- Använd avståndsformeln för att bestämma linjesegmentets längd.
- Verifiera denna längd med båglängdsintegralen.

Låt oss betrakta ett litet volymselement ΔV_i genom att snitta kroppen så att en planparallell skiva med bredd Δx_i uppkommer. I intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ väljer vi en punkt c_i .

Skivans volym kan då approximeras med en "cylindervolym":

$$\Delta V_i = A(c_i) \Delta x_i$$

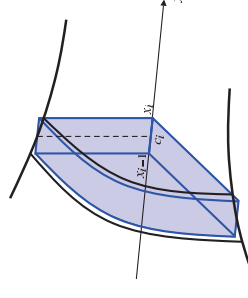


Figure 3

Skivformeln

Vi adderar dessa bidrag för att få ett närmevärde till volymen:

$$V = \sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x_i,$$

vilket är en Riemannsumma för integralen

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

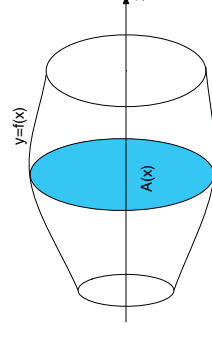
Anmärkning

Skivformelns huvudproblem är att bestämma areafunktionen $A(x)$. Detta är i allmänhet ingen trivial uppgift.

Vi skall i denna kurs betrakta ett viktigt specialfall.

Rotationsvolym

Antag att området, begränsat av funktionskurvan $y = f(x)$, x -axeln samt linjerna $x = a$ och $x = b$ roterar kring x -axeln.



Cirkulärt tvärsnitt

Tvärsnittet är cirkulärt med arean

$$A(x) = \pi f^2(x), \quad (\pi \text{ ggr radien i kvadrat})$$

och rotationskroppens volym är

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

Exempel

Vid rotation av kurvan

$$y = x^2, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

kring x -axeln uppkommer en rotationskropp. Bestäm dess volym.

Exempel

Bestäm volymen av ett klot med radie a , genom att låta kurvan

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leq x \leq a,$$

rotera kring x -axeln.

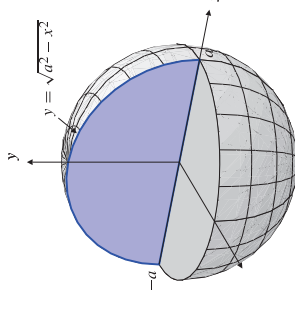


Figure 2.5a

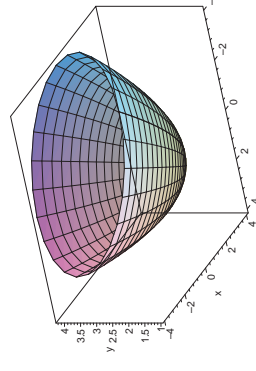
Rotation kring y -axeln

Exempel

Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då området, begränsat av kurvan

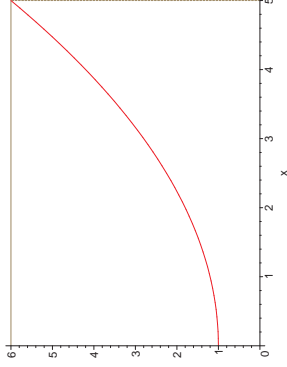
$$y = \frac{x^2}{5} + 1,$$

y -axeln samt linjerna $y = 1$ och $y = 6$ roterar kring y -axeln.



Lösningförslag

Vi betraktar figuren och inser att snittytan är cirkulär med arean πx^2 .



Volymen av rotationskroppen blir med skivformeln

$$V = \int_1^6 \pi x^2 dy.$$

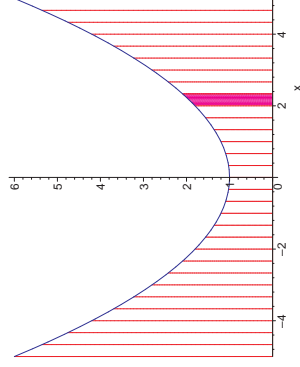
Vi måste uttrycka x som funktion av y . Detta ger

$$V = \int_1^6 \pi \cdot \underbrace{5(y-1)}_{x^2} dy = \dots = 125/2 \cdot \pi.$$

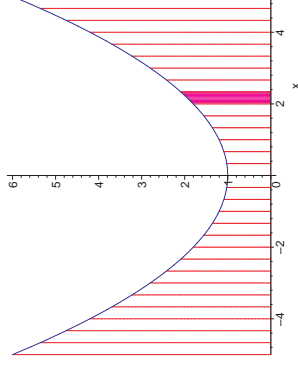
Beräkning av volymer: Cylindriska rör

Ibland måste man använda andra volymselement än cylindriska skivor.

Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området, begränsat av kurvan $y = x^2/5 + 1$, x -axeln och linjerna $x = 0$ och $x = 5$ roteras kring y -axeln.



Vi betraktar rotationskroppen, efter att ha gjort en indelning i "tunnna" segment.

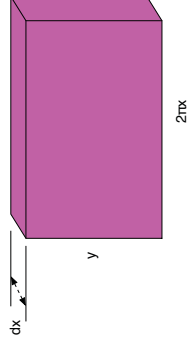


Låt det markerade segmentet rotera kring y -axeln. Då uppkommer ett tunt cylindriskt rör vars mått vi approximativt kan sätta till följande:

Rörellementets volym

- radie x ,
- tjocklek dx ,
- höjd y .

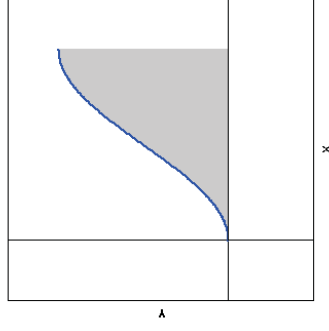
Om vi "böjer ut" röret, kan vi enkelt bestämma rörets volym dV .



$$dV = 2\pi x dx \cdot y.$$

Avslutande exempel

Det skuggade området (se figur), begränsat av x -axeln, linjen $x = \pi/2$ och kurvan $y = \sin^2 x$, bringas i rotation kring y -axeln. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen.



Det är viktigt att du på egen hand läser (och löser) de två följande exemplen. Exempelen visar på nyttiga strategier i räknearbetet.



Rörformeln

och rotationskroppens volym är

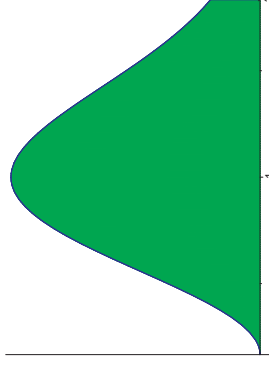
$$V = \int_0^5 dV = \int_0^5 2\pi x \cdot y dx$$

Den sökta volymen blir (med $y = x^2/5 + 1$):

$$V = \int_0^5 2\pi x \cdot y dx = \int_0^5 2\pi x \cdot \left(\frac{x^2}{5} + 1\right) dx.$$

Räkna på egen hand

Beräkna volymen V av den rotationskropp som uppstår då området, begränsat av kurvan $y = x^2 e^{-x^2}$, positiva x -axeln samt linjen $x = X$ roteras runt y -axeln.

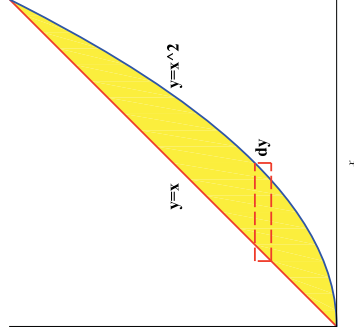


Beräkna även $\lim_{X \rightarrow \infty} V$.

$$\int_0^X \left(\frac{2}{z^2} x^{-2} (1+z^2) - \frac{2}{z} \right) dz$$

Läs och lös på egen hand

Betrakta området R begränsat av kurvorna $y = x$ och $y = x^2$. Beräkna volymen V av den resulterande kroppen när området R roteras kring y -axeln.

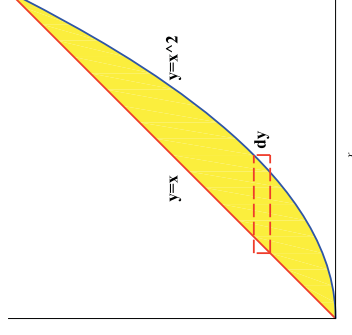


Lösningförslag-tjuvkika inte

Arealelementet $A(y)$ är en ihålig cirkelskiva:

$$A(y) = \pi(\sqrt{y})^2 - \pi y^2.$$

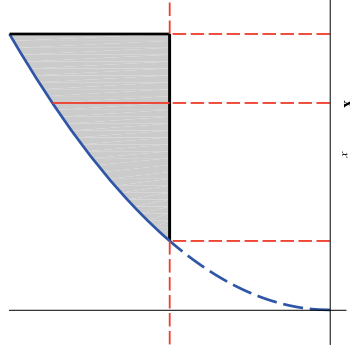
Volymselementet $dV = A(y) dy$.



$$V = \pi \int_0^1 (y - y^2) dy = \dots \quad (\text{Svar } \pi/6.)$$

Extraövning

Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området begränsat av $y = \sqrt{x}$ och linjerna $y = 1$, $x = 4$ roteras kring $y = 1$.
(Svar $7/6\pi$)



Lösningförslag-tjuvkika inte

Skivformeln.

$$V = \int dV =$$

$$\begin{aligned} \text{Volymelementet } dV &= \pi(\sqrt{x} - 1)^2 dx = \pi(x + 1 - 2\sqrt{x}) dx \\ &= \int_1^4 \pi(x + 1 - 2\sqrt{x}) dx = \dots = \pi \cdot \frac{63 - 56}{6} \end{aligned}$$