M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, Lekt 11, V14

Staffan Lundberg

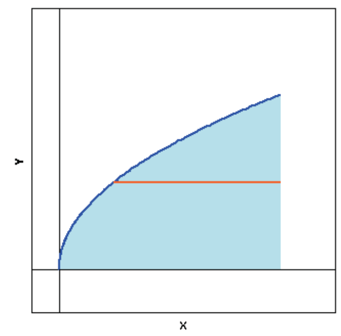
Luleå Tekniska Universitet

Lekt 10

Om kurvan

$$y = \sqrt{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 4,$$

bringas i rotation kring x-axeln, bildas en rotationskropp.



Beräkna kroppens volym

- med rörformeln,
- med skivformeln.

Numeriska metoder–Trapetsregeln

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig och begränsad på $[a,b]$. Vi vill bestämma värdet av integralen

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Med analysens huvudsats vet vi att detta värde är $F(b) - F(a)$, där F är en primitiv funktion till f.

Ibland kan vi inte beräkna (1) exakt. Orsaken är, att vi inte har möjlighet att uttrycka primitiva funktionen $F(x)$ i någon enkel, känd funktion.

Vi är därmed hänvisade till approximativa beräkningar. Det existerar ett flertal metoder för s.k. *numerisk integration*, eller numerisk kvadratur som det också kallas.

Trapetsregeln

Tidigare diskuterade vi hur man approximerade A med rektangelareor, dvs. vi ersatte $f(x)$ med styckvis *konstanta* funktioner.

Nu skall vi behandla en enkel metod som bygger på att man ersätter $f(x)$ med styckevis *linjära* funktioner.

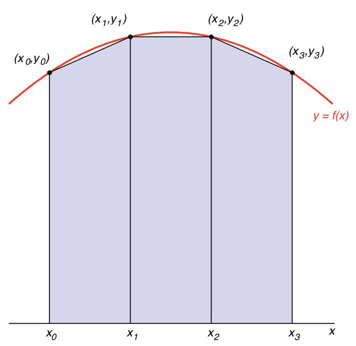
Antag att vi har en godtycklig kontinuerlig funktion f på ett slutet intervall $[a, b]$.

Vi delar in $[a, b]$ i n lika stora delintervall av längd $h = (b - a)/n$. Delningspunkterna x_i kan då uttryckas

$$x_i = a + i \cdot h \, , \, i = 0 \ldots n.$$

I varje delintervall ersätter man $f(x)$ med en rät linje, enligt följande figur.

Indelning av $[a, b]$ i 3 lika stora delintervall.



Vi beräknar de tre trapetsareorna:

$$h \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + h \cdot \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2}$$

Vi förenklar:

$$T(h) = h \cdot \frac{f(x_0) + f(x_3)}{2} + h \cdot (f(x_1) + f(x_2)) \, . \qquad (2)$$

Uttrycket (2), med beteckning $T(h)$, är den sammanlagda arean av parallelltrapetsen. Denna area är ett approximativt värde till integralen (1).

Vi generaliserar och definierar:

Definition

Trapetsregeln med steglängd h:

$$T(h) = h \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} \right).$$

Anmärkning

- För att trapetsregeln skall ge bra noggrannhet, krävs att antalet delningspunkter är stort. Det gäller att felet $T(h) - A \approx c \cdot h^2$. Det innebär att om steglängden halveras, så minskar felet till en fjärdedel.
- Trapetsregeln fungerar även då $f(x) < 0$.

Exempel

Approximera

$$\int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

med trapetsregeln, steg $h = 0.2$.

Lösningsförslag

Vi arrangerar värdena i form av en tabell:

x	-0.5	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5
$f(x)$	0.3521	0.3814	0.3970	0.3970	0.3814	0.3521

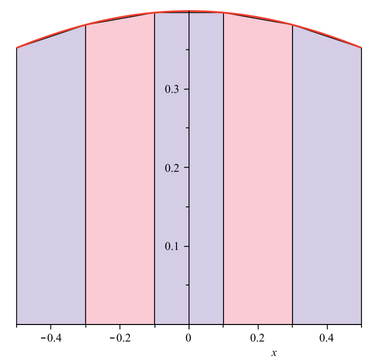
Trapetsregeln, steg $h = 0.2$, ger:

$$T(0.2) = 0.2 \cdot \sum_{i=1}^{4} f(x_i) + 0.2 \cdot \frac{f(-0.5) + f(0.5)}{2} =$$

$$= 0.2 \cdot (0.3814 + 0.3970 + 0.3970 + 0.3814) + 0.2 \cdot \frac{0.3521 + 0.3521}{2} =$$

$$= 0.3114 + 0.0704 = 0.3818.$$

I vidstående figur ser vi en graf över $T(0.2)$. ”Exakt” värde: 0.3830.



Matlab-kod

Listing 1: trapetz.m

```
function integral= trapetz(a,b,n,f)
h=(b-a)/n;
x=[a+h:h:b-h];
integral=h/2*(2*sum(feval(f,x))+feval(f,a)+feval(f,b));
end
```

Listing 2: f.m

```
function y = f(t)
%funktionen som ska integreras
y=1/sqrt(2*pi)*exp(-1/2*t.^2);
end
```


I kommandofönstret

```
>> trapetz(-0.5,0.5,5,'f')

ans =
    0.3817
```

Avslutande exempel

Approximera

$$\int_2^3 \sqrt{1 + x - \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

med trapetsregeln, steg $h = 0.25$.

Lösningsförslag

x	2	2.25	2.5	2.75	3
$f(x)$	1.259	1.323	1.385	1.446	1.506

Trapetsregeln, steg $h = 0.25$, ger:

$$T(0.25) = 0.25 \cdot \sum_{i=1}^{3} f(x_i) + 0.25 \cdot \frac{f(2) + f(3)}{2} =$$

$$= 0.25 \cdot (1.323 + 1.385 + 1.446) + 0.25 \cdot \frac{1.259 + 1.506}{2} =$$

$$= 1.038 + 0.346 = 1.384.$$

Extrauppgift: Lös uppgiften med Matlab. Använd exempelvis den kod som finns beskriven i dagens stordior.