Numeriska metoder i M0043M.

Staffan Lundberg,
Luleå tekniska universitet,
inst. för matematik, 971 87 LULEÅ.
lund@ltu.se

14 december 2011

1 Inledning

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig och begränsad på $[a, b]$. Vi vill bestämma värdet av integralen

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Med analysens huvudsats vet vi att detta värde är $F(b) - F(a)$, där F är en primitiv funktion till f.

Ibland kan vi inte beräkna (1) exakt. Orsaken är, att vi inte har möjlighet att uttrycka primitiva funktionen $F(x)$ i någon enkel, känd funktion. Vi är därmed hänvisade till approximativa beräkningar. Det existerar ett flertal metoder för s.k. *numerisk integration*, eller numerisk kvadratur som det också kallas.

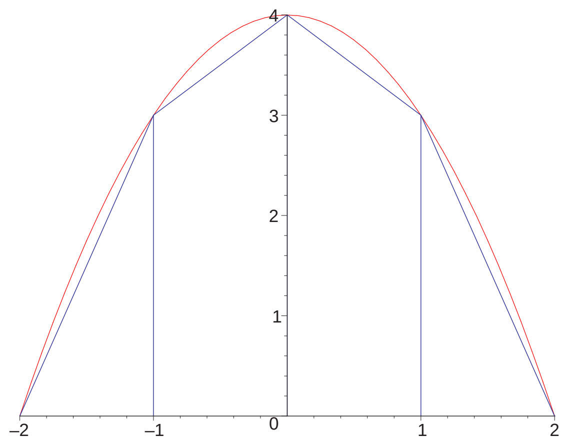
2 Trapetsregeln

Tidigare diskuterade vi hur man approximerade A med rektangelareor, dvs. vi ersatte $f(x)$ med styckevis *konstanta* funktioner. Nu skall vi behandla en enkel metod som bygger på att man ersätter $f(x)$ med styckevis *linjära* funktioner.

Antag att vi har en godtycklig kontinuerlig funktion f på ett slutet intervall $[a, b]$. Vi delar in $[a, b]$ i n lika stora delintervall av längd $h = (b - a)/n$. Delningspunkterna x_i kan då uttryckas

$$x_i = a + i \cdot h \ , \ i = 0 \ldots n.$$

I varje delintervall ersätter man $f(x)$ med en rät linje. Vi betraktar följande figur.



Figur 1: Indelning av $[a, b]$ i 4 lika stora delintervall.

Vi beräknar de fyra trapetsareorna:

$$h \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + h \cdot \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} + h \cdot \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2}$$

Vi förenklar:

$$T(h) = h \cdot \frac{f(x_0) + f(x_4)}{2} + h \cdot (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) \quad . \qquad (2)$$

Uttrycket (2), med beteckning $T(h)$, är den sammanlagda arean av de fyra parallelltrapetsen. Denna area är ett approximativt värde till integralen (1).

Vi generaliserar och sammanfattar:

Definition 1 *Trapetsregeln med steglängd h:*

$$T(h) = h \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + h \cdot \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} \quad .$$

Anmärkning 1

- *För att trapetsregeln skall ge bra noggrannhet, krävs att antalet delningspunkter är stort. Det gäller att felet $T(h) - A \approx c \cdot h^2$. Det innebär att om steglängden halveras, så minskar felet till en fjärdedel.*
- *Trapetsregeln fungerar även då $f(x) < 0$.*

Exempel 1
Approximera

$$\int_0^\pi \cos(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

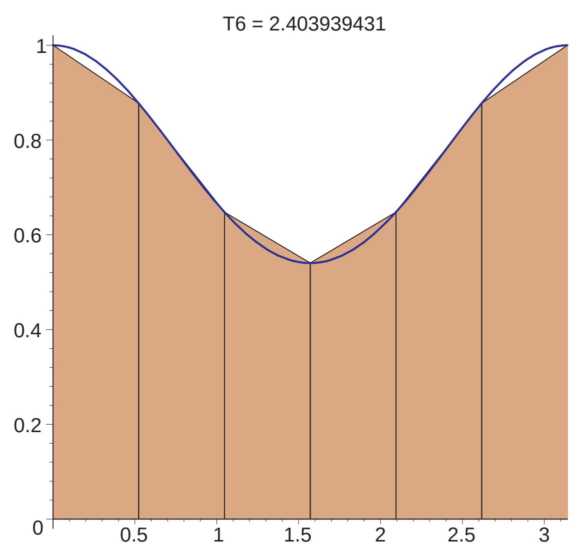
med trapetsregeln, steg $h = \pi/6$.

Vi arrangerar värdena i form av en tabell (närmevärden med 4 decimaler):

x	0	$\pi/6$	$2\pi/6$	$3\pi/6$	$4\pi/6$	$5\pi/6$	π
$f(x)$	1	0.8776	0.6479	0.5403	0.6479	0.8776	1

Trapetsregeln, steg $h = \pi/6$, ger:

$$T(\pi/6) = \pi/6 \cdot \sum_{i=1}^{5} f(x_i) + \pi/6 \cdot \frac{f(0) + f(\pi)}{2} =$$
$$= \pi/6 \cdot (0.8776 + 0.6479 + 0.5403 + 0.6479 + 0.8776) + \pi/6 \cdot \frac{1+1}{2} =$$
$$= 1.8804 + 0.5236 \approx 2.4040.$$



Figur 2: Graf över $T(\pi/6)$.

Vi avslutar med ett exempel där $f(x)$ antar såväl positiva som negativa värden i integrationsintervallet.

Exempel 2
Approximera

$$\int_0^1 \cos(x^2 + x)\,\mathrm{d}x$$

med trapetsregeln, steg $h = 0.125$.

Vi arrangerar värdena i tabellform (närmevärden med 4 decimaler):

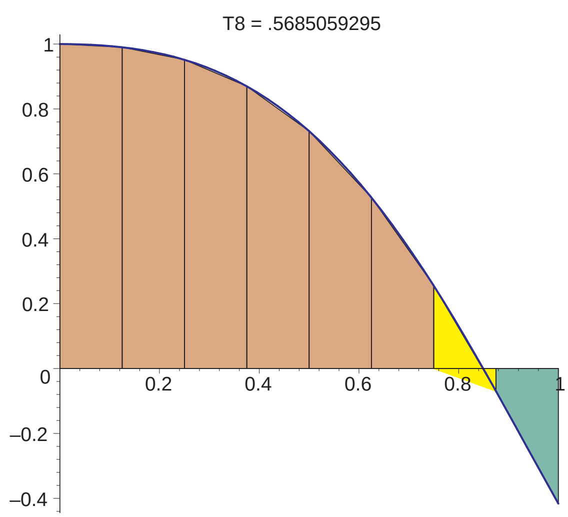
x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1
$f(x)$	1	0.9901	0.9516	0.8700	0.7317	0.5271	0.2554	-0.0698	-0.4161

Trapetsregeln, steg $h = 0.125$, ger:

$$T(0.125) = 0.125 \cdot \sum_{i=1}^{7} f(x_i) + 0.125 \cdot \frac{f(0) + f(1)}{2} =$$

$$= 0.125 \cdot (0.9901 + 0.9516 + 0.8700 + 0.7317 + 0.5271 + 0.2554 + (-0.0698)) + 0.125 \cdot \frac{1 - 0.4161}{2} =$$

$$= 0.5320 + 0.0365 \approx 0.5685.$$



Övningar

1. Approximera
$$\int_0^{1/2} e^x \, dx$$
med trapetsregeln, steglängd $h = 0.25$.

2. Approximera
$$\int_0^{\pi/2} \cos(\sin x) \, dx$$
med trapetsregeln. Svara med 5 decimaler. Prova olika steglängder.

3. Approximera
$$\int_0^{1.6} \ln\left(2 + \cos(16\,t)\right) \, dt$$
med trapetsregeln, steglängd $h = 0.4$. Svara med 4 decimaler.

4. Approximera
$$\int_0^{1} \frac{\sin x}{x} \, dx$$
med trapetsregeln, steglängd $h = 0.2$. Svara med 5 decimaler.

5. Approximera π med 5 decimaler från en integral på formen
$$\int_a^{b} \frac{k}{1 + x^2} \, dx.$$
Använd trapetsregeln med lämplig steglängd och lämpliga värden på a, b och k.

Svar

1. 0.652096.
2. 1.20197.
3. 1.7378.
4. 0.94508.

Tack

Tack till universitetslektor Ove Edlund för värdefulla synpunkter på innehållet.

Referenser

[1] W. Cheney and D. Cincaid. *Numerical Mathematics and Computing.* Brooks/Cole Publishing Company, 2 edition, 1985.

[2] G. Dahlquist and Å. Björck. *Numerical Methods.* Prentice-Hall, 1974.

[3] P. Pohl. *Grundkurs i Numeriska Metoder.* Liber, 1 edition, 2005.