KAPITEL 4

Introduktion till partiella differentialekvationer

4.1. Några exempel

Exempel 4.1. (Den endimensionella värmeledningsekvationen)

Vi betraktar värmeledningsproblemet (se Kapitel 1) i en (oändligt) tunn stav av längd l. Låt värmen i punkten x vid tidpunkten t ges av $u(x,t)$. Antag att värmen i staven vid tiden 0 beskrivs av funktionen $f(x)$, och att värmen i ändpunkterna $x = 0$ och $x = l$ ges av funktionerna $h(t)$, respektive $g(t)$ (i praktiken är h och g uppmätta kvantiteter). Då beskrivs $u(x,t)$ av den s.k. *värmeledningsekvationen*:

$$\begin{aligned} u'_t - ku''_{xx} &= 0, & t > 0, 0 < x < l, \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) &= h(t), & t > 0, \\ u(l,t) &= g(t), & t > 0. \end{aligned}$$

FIGUR 4.1.1. Endimensionell värmeledning

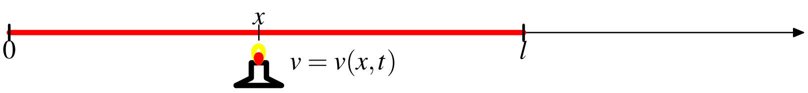
♢

Exempel 4.2. (Den inhomogena endimensionella värmeledningsekvationen)

Antag att vi har samma system som i föregående exempel, men att vi dessutom tillför värmen $v(x,t)$ i punkten x vid tiden t. Då beskrivs $u(x,t)$ istället av den *inhomogena värmeledningsekvationen*:

$$\begin{aligned} u'_t - ku''_{xx} &= v(x,t), & t > 0, 0 < x < l, \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) &= h(t), & t > 0, \\ u(l,t) &= g(t), & t > 0. \end{aligned}$$

FIGUR 4.1.2. Endimensionell inhomogen värmeledning

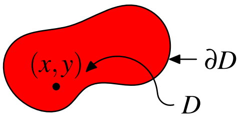


♢

Exempel 4.3. (Den tvådimensionella värmeledningsekvationen)

Vi betraktar nu värmeledning i ett tvådimensionellt område D. Låt värmen i punkten $(x,y) \in D$ vid tiden t ges av $u(x,y,t)$. Antag att värmefördelningen vid tiden $t=0$ beskrivs av funktionen $f(x,y)$, och att värmen i randen till D är konstant (oberoende av tiden) och ges av funktionen $g(x,y)$ (i praktiken så kan man åstadkomma konstant värme på randen genom att tillföra eller leda bort värme). Antag dessutom att värmen $v(x,y,t)$ tillförs i punkten (x,y) vid tidpunkten t. Då beskrivs $u(x,y,t)$ av den *tvådimensionella värmeledningsekvationen*:

$$\begin{aligned} u'_t - k\left(u''_{xx} + u''_{yy}\right) &= v(x,y,t), \quad (x,y) \in D, t > 0, \\ u(x,y,0) &= f(x,y), \quad (x,y) \in D, \\ u(x,y,t) &= g(x,y), \quad (x,y) \in \partial D, t > 0. \end{aligned}$$



$\diamondsuit$

Exempel 4.4. (Den tredimensionella värmeledningsekvationen)

Vi betraktar nu värmeledning i ett tredimensionellt område V. Vi använder samma beteckningar som ovan, förutom att vi även har en z-koordinat. Värmen $u(x,y,z,t)$ beskrivs av den *tredimensionella värmeledningsekvationen*:

$$\begin{aligned} u'_t - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) &= v(x,y,z,t), \quad (x,y,z) \in V, t > 0, \\ u(x,y,z,0) &= f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in V, \\ u(x,y,z,t) &= g(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \partial V, t > 0. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

$\diamondsuit$

ANMÄRKNING 1. Observera att *gradienten* "grad" av funktionen $u(x,y,z)$ ges av vektorn

$$\operatorname{grad} u = \nabla u \quad = \quad \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u.$$

Om ∇skrivs som vektorn

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

ges *divergensen* "div", av ett vektorfält $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ av

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Divergensen av gradienten ges därmed av

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}.$$

Alltså gäller att om $k = k(x,y,z)$ är konstant $= k_0$ så kan (4.1.1) skrivas som

$$u'_t - k_0\left(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}\right) = v \quad \Leftrightarrow \quad u'_t - k_0 \Delta u = v.$$

ANMÄRKNING 2. Observera att ekvationen

$$u'_t - \kappa \Delta u = v$$

i allmänhet beskriver en *diffusionsprocess.* Värmeledning innebär en diffusion (transport) av värme, och är ett exempel på en sådan process. Några andra exempel på diffusionsprocesser är

- Blandning av en vätska i en annan (t.ex. mjölk i en tekopp).

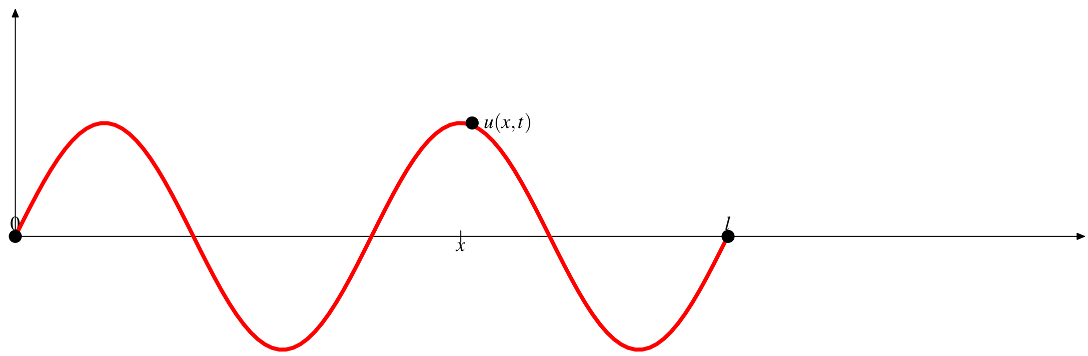
- Utbredning av en gas i luft (t.ex. spridning av en giftig gas i luften).
- Spridning av elementarpartiklar i ett homogent material (t.ex. neutrinos i en kärnkraftreaktor).

Eftersom ekvationerna är de samma kommer naturligtvis de metoder vi går igenom för att lösa olika exempel på värmeledningsekvationen kunna användas för alla olika typer av diffusion. En annan PDE som är lika viktig som diffusionsekvationen är vågekvationen, vilken vi nu ska se några exempel på.

Exempel 4.5. (Den endimensionella vågekvationen)
Betrakta en vibrerande (elastisk) sträng av längd l som sitter fast i båda ändpunkterna. Placera strängen längs en x-axel och låt $u(x,t)$ beskriva strängens position vid koordinaten x och tiden t. Vid startögonblicket $t = 0$ ges strängens position och hastighet av funktionerna $f(x)$ respektive $g(x)$. Strängens vibrationer beskrivs av den endimensionella *vågekvationen*:

$$\begin{aligned} u''_{tt} - ku''_{xx} &= 0, \quad 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) &= 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), 0 < x < l, \\ u'_t(x,0) &= g(x), 0 < x < l. \end{aligned}$$

FIGUR 4.1.3. Vibrerande sträng

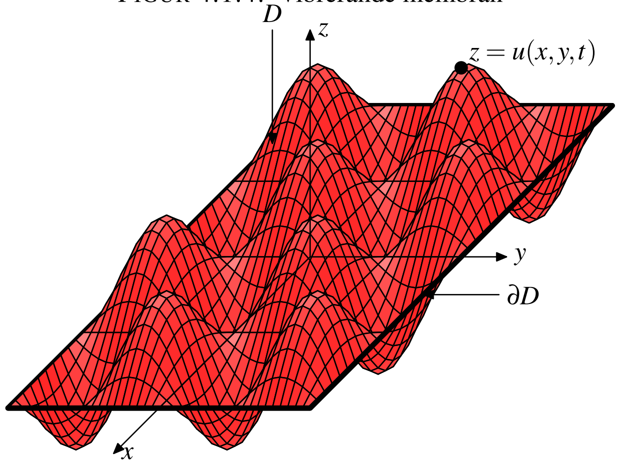


◇

Exempel 4.6. (Den tvådimensionella vågekvationen)
Betrakta ett vibrerande membran som sitter fast i kanterna (t.ex. ett trumskinn fastspänt i en trumma). Placera membranet så att det täcker ett område D i xy-planet, och låt $u(x,y,t)$ beskriva positionen av membranet i punkten (x,y) vid tiden t. Vid tiden $t = 0$ ges membranets position och hastighet av funktionerna $f(x,y)$ respektive $g(x,y)$. Membranets vibrationer beskrivs av den tvådimensionella *vågekvationen*:

$$\begin{aligned} u''_{tt} - k\left(u''_{xx} + u''_{yy}\right) &= 0, && (x,y) \in D, t > 0 \\ u(x,y,t) &= 0, && (x,y) \in \partial D, t > 0 \\ u(x,y,0) &= f(x,y), && (x,y) \in D, \\ u'_t(x,y,0) &= g(x,y), && (x,y) \in D. \end{aligned}$$

FIGUR 4.1.4. Vibrerande membran



◇

Exempel 4.7. (Den tvådimensionella *Laplaceekvationen*)

Antag att vi har ett tvådimensionellt område, som i Exempel 4.3, och vill undersöka hur värmefördelningen i systemet ser ut då det uppnått *termisk jämvikt,* d.v.s. när det gått så lång tid att värmefördelningen inte längre förändras med tiden. Antag dessutom att vi inte tillför någon värme. Detta innebär att vi ska sätta $u'_t = 0$ och $v = 0$ i Exempel 4.3, vilket ger oss **Laplaces ekvation**, vilken kan skrivas på följande ekvivalenta sätt:

$$\begin{aligned} u''_{xx} + u''_{yy} &= 0, \Leftrightarrow \\ \nabla^2 u &= 0, \Leftrightarrow \\ \Delta u &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

(Ofta brukar Δ kallas för Laplaces operator, vilken är av mycket stor betydelse även inom ren matematik.) Lösningen $u(x,y)$ till (4.1.2) ger värmen i punkten (x,y) då systemet har uppnått termisk jämvikt. Detta brukar kallas en *stationär* lösning till värmeledningsproblemet.

◇

Exempel 4.8. (Den tvådimensionella Poissons ekvation)

Poissons ekvation är en inhomogen Laplaceekvation, vilken alltså kan skrivas på följande ekvivalenta sätt:

$$\begin{aligned} u''_{xx} + u''_{yy} &= f \Leftrightarrow \\ \nabla^2 u &= f \Leftrightarrow \\ \Delta u &= f. \end{aligned}$$

Här har vi alltså $u'_t = 0$ och $v(x,y,t) = -\frac{1}{k} f(x,y)$ i Exempel 4.3, och vi kan alltså tolka Poissons ekvation som värmeledningsekvationen när vi har termisk jämvikt ($u'_t = 0$), samt tillför värmen $f(x,y)$ i punkten (x,y) (oberoende av tiden).

◇

Exempel 4.9. (Den tredimensionella Poissons ekvation)

$$\begin{aligned} u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz} &= f \Leftrightarrow \\ \nabla^2 u &= f \Leftrightarrow \\ \Delta u &= f. \end{aligned}$$

I det här fallet har vi $u'_t = 0$ och $v = -\frac{1}{k_0} f$ i Exempel 4.4, och den tredimensionella Poissons ekvation kan precis som den tvådimensionella ovan tolkas som värmeledningsekvationen vid termisk jämvikt då vi tillför värmen $-\frac{1}{k_0} f(x,y,z)$ i punkten (x,y,z).

$\diamondsuit$

ANMÄRKNING 3. Om den tillförda värmen i exemplen ovan har negativt tecken ska detta naturligtvis tolkas som en nedkylning.

4.2. En allmän PDE av andra ordningen

En allmän partiell differentialekvation (PDE) kan skrivas som

(4.2.1) $$G\left(x,t,u,u'_x,u'_t,u''_{xx},u''_{xt},u''_{tt}\right) = 0.$$

De grundläggande frågorna vi ställer oss är:

1. *Existerar* det en lösning till PDEn?
2. Är lösningen *unik*?
3. Är lösningen *stabil* vid små störningar?
4. Vilka metoder finns för att konstruera och illustrera lösningar?

Exempel 4.10. Problemen i Exempel 4.1-4.6 har unika lösningar, men problemen i Exempel 4.7-4.9 har inte unika lösningar.

ANMÄRKNING 4. En PDE av typen (4.2.1) har vanligtvis oändligt många lösningar och den allmänna lösningen beror då på ett antal godtyckliga *funktioner* (jämför att allmänna lösningar till en ODE beror på godtyckliga konstanter).

Exempel 4.11. Ekvationen

$$u''_{tx} = tx$$

har lösningarna

$$u = \frac{1}{4}t^2x^2 + g(t) + h(x).$$

$\diamondsuit$

Exempel 4.12. Den tvådimensionella Laplaceekvationen

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0,$$

har t.ex. lösningarna

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2, \\ u(x,y) &= e^x \cos y, \\ u(x,y) &= \ln\left(x^2+y^2\right). \end{aligned}$$

ANMÄRKNING 5. En lösning $u(x,y)$ till Laplaces ekvation kallas för en *harmonisk funktion*. För att hitta harmoniska funktioner kan man använda sig av det faktum att om $f(z) = f(x+iy)$ är en *analytisk funktion*, d.v.s. om $\frac{d}{dz}f(z)$ existerar, så är realdelen $u(x,y) = \Re f(x+iy)$, och imaginärdelen $v(x,y) = \Im f(x+iy)$ harmoniska funktioner.

I exemplet ovan tog vi $f(z) = z^2$, e^z respektive $\log z^2$.

4.3. Linjäritet-Ickelinjäritet

En partiell differentialekvation kan skrivas på formen

(*) $$Lu = f,$$

där L är en *differentialoperator*.

Exempel 4.13. Låt $L = \frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Då blir (*)

$$u_t' - ku_{xx}'' = f,$$

vilket är en endimensionell värmeledningsekvation (se Exempel 4.2).

$\diamondsuit$

Exempel 4.14. Låt

$$L(u) = u\frac{\partial u}{\partial t} + 2txu.$$

Då blir ekvationen (*)

$$u\frac{\partial u}{\partial t} + 2txu = f(x,t).$$

DEFINITION 4.1. Vi säger att (*) är *linjär* om operatorn L har egenskaperna:

(1) $$L(u+v) = Lu + Lv,$$

(2) $$L(cu) = cLu.$$

Om något av dessa villkor inte är uppfyllt säger vi att (*) är *ickelinjär*.

Exempel 4.15. Värmeledningsekvationen i Exempel 4.13 är linjär.

Bevis: Vi måste undersöka om $L = \frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ uppfyller villkoren (1) och (2) ovan.

(1) $$L(u+v) = \frac{\partial(u+v)}{\partial t} - k\frac{\partial^2(u+v)}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t} - k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = Lu + Lv.$$

(2) $$L(cu) = \frac{\partial(cu)}{\partial t} - k\frac{\partial^2(cu)}{\partial x^2} = c\frac{\partial u}{\partial t} - kc\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\left(\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = cLu.$$

Och alltså, eftersom L uppfyller både (1) och (2) så är ekvationen

$$Lu = f$$

linjär. $\square$

Exempel 4.16. Den partiella differentialekvationen i Exempel 4.14 är ickelinjär.
Bevis: Vi börjar med att testa egenskap (1).

$$\begin{aligned} L(u+v) &= (u+v)\,(u+v)'_t + 2tx\,(u+v) \\ &= uu'_t + uv'_t + vu'_t + vv'_t + 2txu + 2txv, \text{ och} \\ Lu + Lv &= uu'_t + 2txu + vv'_t + 2txv. \end{aligned}$$

Eftersom $L\,(u+v) - (Lu+Lv) = uv'_t + vu'_t \neq 0$ är inte (1) uppfylld och ekvationen är alltså ickelinjär. $\square$

4.4. Klassificering av PDE

En allmän linjär andra ordningens PDE kan skrivas som

(4.4.1) $$a(x,t)u''_{tt} + b(x,t)u''_{xt} + c(x,t)u''_{xx} + d(x,t)u'_t + e(x,t)u'_x + q(x,t)u = f(x,y), \; (x,t) \in \mathcal{D}.$$

Sätt

$$D(x,t) = (b(x,t))^2 - 4a(x,t)c(x,t).$$

Vi säger att PDEn (4.4.1) är

- **Elliptisk** om $D(x,t) < 0$ i $\mathcal{D}$,
- **Parabolisk** om $D(x,t) = 0$ i $\mathcal{D}$,
- **Hyperbolisk** om $D(x,t) > 0$ i $\mathcal{D}$.

Exempel 4.17. Betrakta den tvådimensionella Laplaceekvationen

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

Här är $D(x,y) = 0^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -4 < 0$, och ekvationen är således elliptisk.

$\diamondsuit$

Exempel 4.18. Betrakta värmeledningsekvationen

$$u'_t - u''_{xx} = 0.$$

Här är $D(x,y) = 0^2 - 4\cdot 0\cdot(-1) = 0$, och ekvationen är således parabolisk.

$\diamondsuit$

Exempel 4.19. Betrakta den endimensionella vågekvationen

$$u''_{tt} - u''_{xx} = 0.$$

Här är $D(x,y) = 0^2 - 4\cdot 1\cdot(-1) = 4 > 0$, så ekvationen är hyperbolisk.

4.5. Superpositionsprincipen

Betrakta en linjär och homogen (med 0 i högerledet) PDE:

(*) $$Lu = 0.$$

Om (*) har lösningar $u_1, u_2, \ldots$ så är också alla linjärkombinationer av dessa,

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n,$$

lösningar till (*) eftersom

$$Lu = L\,(c_1u_1 + \cdots + c_nu_n) = c_1Lu_1 + \cdots + c_nLu_n = 0 + \cdots + 0 = 0.$$

Detta kallas för *superpositionsprincipen* och gäller även för oändliga summor:

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n + \cdots$$

om vissa konvergensegenskaper gäller[1].

Den kontinuerliga superpositionsprincipen:

Antag att $u_\alpha(x,t)$ uppfyller $Lu_\alpha = 0$ för alla α, $a \le \alpha \le b$, och låt

$$u(x,t) = \int_a^b c(\alpha) u_\alpha(x,t)\, d\alpha,$$

där $c(\alpha)$ är en godtycklig (integrerbar) funktion. Då gäller även att

$$Lu = 0.$$

Bevis:

$$\begin{aligned} Lu &= L\left(\int_a^b c(\alpha) u_\alpha(x,t)\, d\alpha\right) \\ &= \int_a^b c(\alpha) Lu_\alpha(x,t)\, d\alpha \\ &= \int_a^b c(\alpha)\cdot 0\, d\alpha = 0. \end{aligned}$$

□

Exempel 4.20. Det är enkelt att verifiera att

$$u_\alpha(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{4kt}\right),\ t > 0,\ -\infty < \alpha < \infty$$

uppfyller värmeledningsekvationen

$$u_t' - k u_{xx}'' = 0.$$

Alltså uppfylls denna ekvation även av funktionen

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{4kt}\right) d\alpha.$$

4.6. Rättställda problem

Ett randvärdes problem sägs vara *rättställt* (eng. well-posed) om

(a) det *existerar* en lösning,
(b) lösningen är *unik*, och
(c) lösningen är *stabil*.

Exempel 4.21. Betrakta begynnelsevärdesproblemet bestående av ekvationen

$$u_{tt}'' + u_{xx}'' = 0,\ t > 0,\ -\infty < x < \infty,$$

tillsammans med begynnelsevärdena

$$u(x,0) = 0,\ u_t'(x,0) = 0,\ -\infty < x < \infty. \tag{4.6.1}$$

Den unika lösningen ges av den funktion som är konstant 0:

$$u(x,t) \equiv 0,\ t \ge 0,\ -\infty < x < \infty.$$

[1] T.ex. om vi har likformig konvergens för: $s_n(x) = \sum_1^n u_j(x) \to u$, $s_n'(x) = \sum_1^n u_j'(x) \to u'$, etc. för alla förekommande derivator.

Låt oss nu ändra lite grand på begynnelsevärdena (4.7) till

$$u(x,0)=0,\ u_t'(x,0)=10^{-4}\sin 10^4 x. \tag{4.6.2}$$

Lösningen till det nya begynnelsevärdesproblemet ges av

$$u(x,t)=10^{-8}\sin\left(10^4x\right)\sinh\left(10^4t\right).$$

För stora t gäller att $\sinh\left(10^4t\right)$ är ungefär $\frac{1}{2}\exp\left(10^4t\right)$. Den lilla förändringen i begynnelsevärdet har alltså gett upphov till en förändring i lösningen från en funktion som är konstant 0 till en lösning som till beloppet växer exponentiellt (från sinh-faktorn), samt oscillerar exponentiellt mycket (från sinus-faktorn). En verkligt dramatisk förändring! Detta betyder att lösningen inte är stabil, och alltså gäller inte (c) ovan. Problemet är alltså icke rättställt (eng. ill-posed).

$\diamondsuit$

Exempel 4.22. Visa att randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_t'-ku_{xx}''=0, & 0<x<l,\ 0<t<T,\\ u(x,0)=f(x), & 0<x<l,\\ u(0,t)=g(t), u(l,t)=h(t), & 0<t<T,\end{cases}$$

där $f\in\mathcal{C}[0,l]$ och $g,h\in\mathcal{C}[0,T]$, har en unik lösning, $u(x,t)$, i rektangeln

$$\mathcal{R}: 0\le x\le l,\ 0\le t\le T.$$

Lösning: Vi kommer senare (i Exempel 5.9) konstruera en lösning till problemet!

Antag nu att det finns *två* skilda lösningar till problemet: $u_1(x,t)$ och $u_2(x,t)$. Då måste funktionen

$$w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$$

uppfylla randvärdesproblemet:

$$\begin{cases} w_t'-kw_{xx}''=0, & 0<x<l,\ 0<t<T,\\ w(x,0)=0, & 0<x<l,\\ w(0,t)=w(l,t)=0, & 0<t<T.\end{cases}$$

Bilda nu "energiintegralen"

$$E(t)=\int_0^l w^2(x,t)dx.$$

Observera att $E(t)\ge 0$, $E(0)=0$, och

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^l 2ww_t'dx = 2k\int_0^l ww_{xx}''dx\\ &= \left[2kww_x'\right]_0^l - 2k\int_0^l \left(w_x'\right)^2dx\\ &= 2k\int_0^l \left(w_x'\right)^2dx \le 0.\end{aligned}$$

Funktionen E är alltså avtagande från $E(0)=0$, och eftersom $E\ge 0$ måste $E(t)\equiv 0$. Detta innebär att även $w(x,t)\equiv 0$, d.v.s. $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ för alla x,t. Då vi från början antog att lösningarna u_1 och u_2 var skilda har vi kommit fram till en *motsägelse*, och alltså har problemet endast *en* lösning.

$\diamondsuit$

4.7. Några anmärkningar om Fourierserier

Betrakta en funktion $f(x)$, $-l < x < l$. Fourierkoefficienterna för f är definierade som

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,\ n = 1,2,\dots, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,\ n = 1,2,\dots, \end{aligned}$$

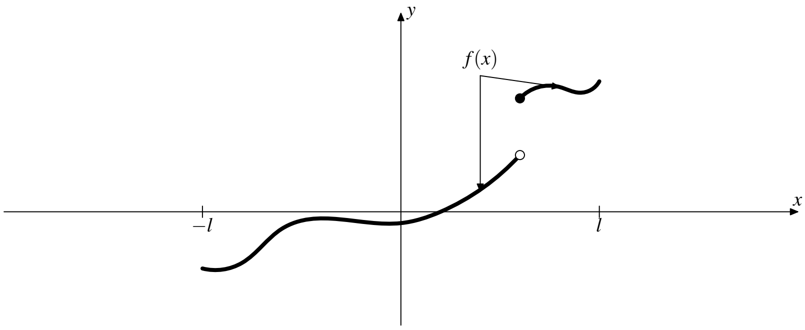
och Fourierserien för f är definierad som

$$\mathcal{S}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

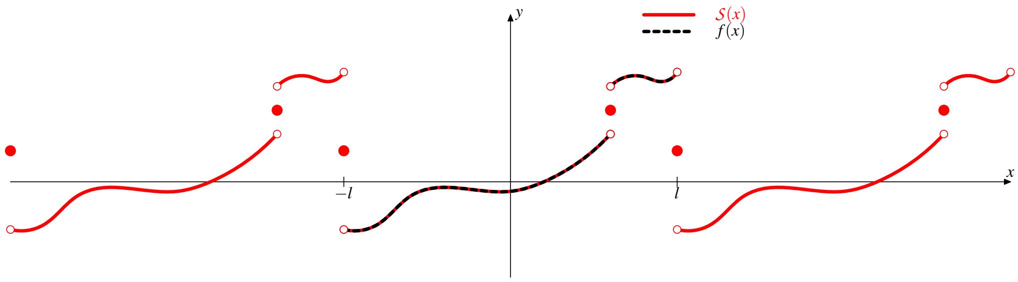
För mer detaljer om Fourierserier se avsnitt 6.2.2. Se även Fig. 4.7.

Antag att $f(x)$ är oändligt många gånger deriverbar i intervallet $-l < x < l$, förutom i ett antal diskontinuitetspunkter. Då gäller:

(a) $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(x+2l)$, för alla x.
(b) $\mathcal{S}(x) = f(x)$ i de punkter där f är kontinuerlig,
(c) $\mathcal{S}(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ i diskontinuitetspunkter[2]



(a) En diskontinuerlig funktion

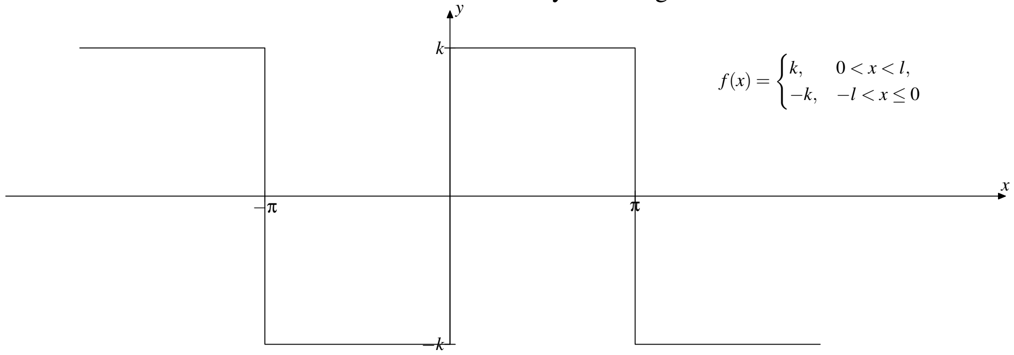


(b) Och dess Fourierserie

I en graf av en diskontinuerlig funktion brukar man indikera det värde funktionen tar i en punkt med en ifylld cirkel, och det värde funktionen inte tar med en ofylld cirkel

[2]Här är $f(+x) = \lim_{y\to x} f(y)$, där vi håller $y > x$ då vi tar gränsvärdet, och på samma sätt definieras $f(x-)$.

FIGUR 4.7.1. En fyrkantsvåg



Exempel 4.23. Betrakta funktionen $f(x)$ från Fig. 4.7.1:

$$f(x) = \begin{cases} k, & 0 < x < l, \\ -k, & -l < x \leq 0. \end{cases}$$

Notera att $f(x)$ är en udda funktion, d.v.s. $f(-x) = -f(x)$. Eftersom $\cos x$ är jämn blir funktionen $f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ udda och vi vet att en integral av en udda funktion över ett jämnt intervall alltid blir 0 (den "negativa" arean tar ut den "positiva" arean), och alltså blir $a_0 = a_n = 0$ för alla n. Och vi har

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \\
&= \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} -k\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx + \int_{0}^{l} k\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \\
&= \frac{2k}{l}\int_{0}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \\
&= \frac{2k}{l}\left[-\frac{l}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]_0^l \\
&= \frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi) \\
&= \frac{2k}{n\pi}(1-(-1)^n).
\end{aligned}$$

D.v.s.

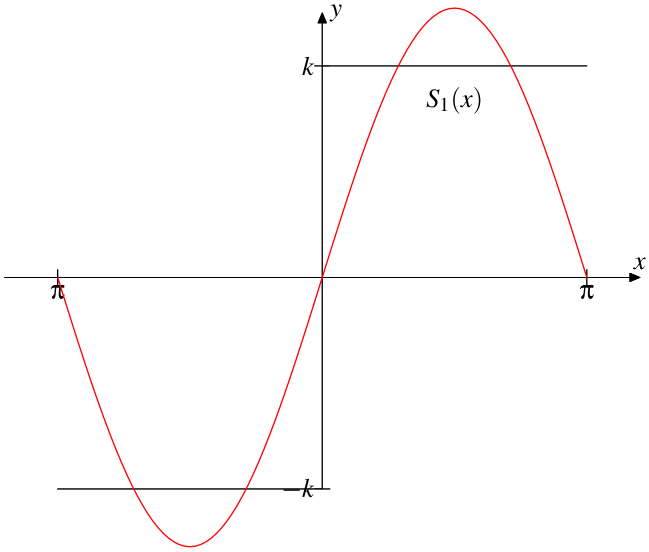
$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = \frac{4k}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \ldots,$$

och Fourierserien för f är alltså

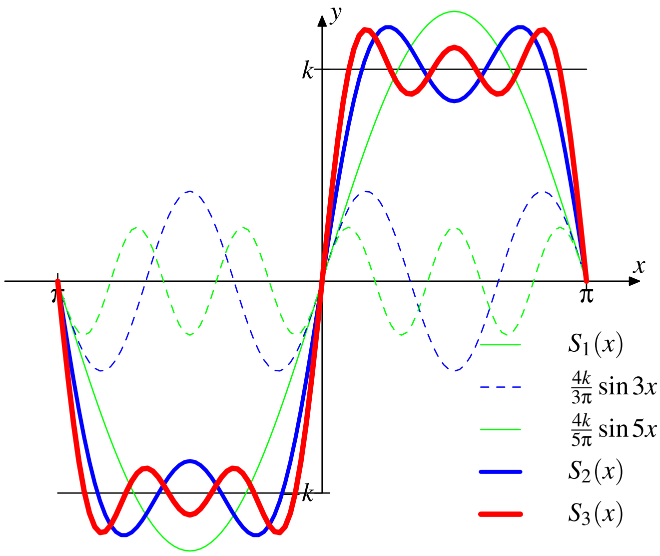
$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) &= \frac{4k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{4k}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{l}\right) \\
&= \frac{4k}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi x}{l}\right) + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Se Fig. 4.7.2 för illustration av några av av de partiella (med bara ett visst antal termer) Fourierserierna för $\mathcal{S}(x)$.

FIGUR 4.7.2. Fourierserier



(a) Första termen



(b) Ytterligare termer

4.8. Separation av variabler

Separation av variabler är en ofta använd metod för att lösa vissa typer av PDE:er och brukar även kallas Fouriers metod.

Modellexempel: Lös problemet

$$u'_t - ku''_{xx} = 0, \qquad 0 < x < l, t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x), 0 < x < l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{3}$$

Att separera variablerna i (1) innebär att vi söker en lösning $u(x,t)$ vilken kan faktoriseras i en del som bara beror på x och en del som bara beror på t. För att se om detta är möjligt gör vi en *ansats*:

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

där X och T är de funktioner vi vill hitta. Om vi deriverar u får vi $u'_t(x,t) = X(x)T'(t)$ och $u''_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$, och sätter vi in detta i (1) får vi ekvationen:

$$X(x)T'(t) - kX''(x)T(t) = 0,$$

vilken kan skrivas om som

$$\frac{T'(t)}{T(t)}\frac{1}{k} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Eftersom vänsterledet endast beror på t och högerledet endast beror på x så måste båda sidorna vara lika med en **konstant**:

$$\frac{T'(t)}{T(t)}\frac{1}{k} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

för någon konstant λ (som vi bestämmer nedan). Istället för den partiella differentialekvationen (1) får vi alltså två stycken ordinära differentialekvationer:

$$\begin{cases} T'(t) & = -\lambda k T(t), \\ X''(x) & = -\lambda X(x), \end{cases}$$

med de allmänna lösningarna

$$T(t) = Ce^{-\lambda kt}, \text{och } X(x) = A\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

Randvärdena (3) ger att antingen är $T \equiv 0$ eller så måste $X(0) = X(l) = 0$. Då det första alternativet bara ger lösningen som är konstant 0 får vi att X måste uppfylla randvillkoren $X(0) = X(l) = 0$, d.v.s.

$$X(0) = B = 0,$$

vilket säger att $B = 0$, och dessutom är

$$X(l) = A\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0.$$

För att återigen undvika den triviala lösningen $W \equiv 0$ (d.v.s. med $A = 0$) måste $\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0$, vilket innebär att

$$\sqrt{\lambda}l = n\pi, n \in \mathbb{Z}^+,$$

som är ekvivalent med att $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ för något positivt heltal n.

Vi har visat att om en lösning till (1) går att faktorisera som $X(x)T(t)$ då kan den skrivas

$$K\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2kt}{l^2}\right),$$

där n är ett positivt heltal och K en konstant. Enligt superpositionsprincipen (avsnitt 4.5) ges den allmänna lösningen till ekvationen (1) och randvärdena (3) av

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2kt}{l^2}\right),$$

där Fourierkoefficienterna, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, bestäms av begynnelsevillkoret (2):

$$(*)\qquad u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Låt nu för enkelhetens skull $l=\pi$ och betrakta några exempel på begynnelsevärden $f(x)$ till ovanstående problem.

Exempel 4.24. Låt $f(x)=2\sin x+4\sin 3x$. Då gäller (*) om $b_1=2$, $b_2=0$, $b_3=4$, $b_4=b_5=\cdots=0$. Lösningen till modellexemplet är alltså

$$u(x,t)=2\sin(x)e^{-xt}+4\sin(3x)e^{-9kt}.$$

♢

Exempel 4.25. Låt $f(x)=1=\dfrac{4}{\pi}\left(\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right)$. Då gäller (*) om $b_1=\dfrac{4}{\pi}$, $b_2=0$, $b_3=\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{3}$, $b_4=0$, $b_5=\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{5}$, $b_6=0$, etc. Lösningen till modellexemplet är nu

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{4}{\pi}\left(\sin(x)e^{-kt}+\frac{1}{3}\sin(3x)e^{-9kt}+\frac{1}{5}\sin(5x)e^{-25kt}+\cdots\right)\\&=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left((2n-1)x\right)e^{-(2n-1)^2kt}.\end{aligned}$$

♢

Exempel 4.26. Om vi har en allmän begynnelsevärdesfunktion $f(x)$, $0\le x\le\pi$, ges lösningen till modellexemplet av

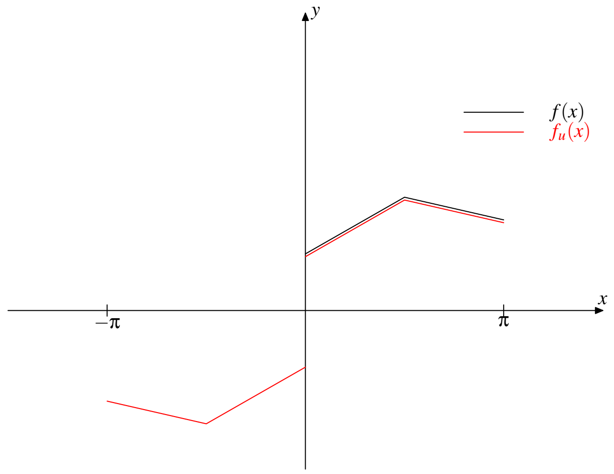
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)\exp\left(-n^2kt\right),$$

där

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_u(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

Här är $f_u(x)$ en utökning av $f(x)$ till en udda funktion i intervallet $-\pi<x<\pi$, dvs $f_u(x)=f(x)$ om $x>0$ och $f_u(x)=-f(x)$ om $x\le 0$ (se Fig. 4.8.1).

FIGUR 4.8.1. Konstruktion av en udda utvidgning



4.9. Övningsuppgifter

4.1. **[S]** Avgör om följande differentialekvationer är linjära/ickelinjära:

a) $u'_t(x,t) + x^2 u''_{xx}(x,t) = 0.$

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t).$

c) $u\Delta u - u'_t = 0.$

d) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial^3 t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = u'_x.$

4.2.* Bestäm de områden där följande partiella differentialekvationer är hyperboliska, elliptiska eller paraboliska:

a) $u''_{tt} + xu''_{xx} + 2u'_x = f(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^2.$

b) $y^2\left(u''_{xx} + u''_{yy}\right) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0.$

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right),\ t > 0,\ r > 0,$ och $c \in \mathbb{R}$ en konstant.

d) $\sin x\left(u''_{tt} + 2u''_{xt}\right) + \cos x u''_{xx} = \tan x,\ t \in \mathbb{R}, |x| \le \pi.$

4.3. **[S]** Låt $u(x,t)$, $t > 0$, $x > 0$ beteckna temperaturen i en oändligt lång stav med värmeledningskonstant k, och vilken upphettas genom att öka temperaturen i ändpunkten så att $u(0,t) = t$. Använd det faktum att $u_\alpha(x,t) = (4\pi kt)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4kt}}$ är en lösning till $u'_t - ku''_{xx} = 0$ för varje $\alpha \in \mathbb{R}$ tillsammans med superpositionsprincipen för att bestämma $u(x,t)$. D.v.s. bestäm en lösning till

$$\begin{aligned} u'_t - ku''_{xx} &= 0,\ x > 0, t > 0. \\ u(0,t) &= t,\ t > 0. \end{aligned}$$

4.4. Avgör om följande problem är rättställda eller ej:

a) $u''_{tt} = u''_{xx}$, $u(0,t) = u(\pi,t) = u(x,0) = u(x,\pi)$, $x,t \in [0,\pi]$.
b) $u'_t - ku''_{xx} = 0$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \sin x$, $x \in [0,\pi]$, $t > 0$.
c) $u'_t - ku''_{xx} = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(x,0) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in [0,\pi]$, $t > 0$.
d) $u'_t - ku''_{xx} = 0$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in [0,\pi]$, $t > 0$.

4.5. **[S]** a) Bestäm Fourierserien för den funktion $f(x)$ som i intervallet $-\pi < x < \pi$ ges av $f(x) = x^2$.
b) använd a) för att visa att $\frac{\pi^2}{12} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

4.6.* Bestäm Fourierserien för $f(t) = |\sin t|$.

4.7. **[S]** Betrakta en stav av längd $L = 1$ med värmeledningskoefficient $k = 1$. Från början har staven den konstanta temperaturen 1. Vi kyler sedan hastigt ned stavens ändpunkter till temperaturen 0, där vi sedan håller temperaturen konstant under experimentets gång.
a) Formulera detta problem matematiskt.
b) Hitta ett uttryck för stavens temperatur i punkten x och tiden t.
(Ledtråd: för Fourierserieutvecklingen av den konstanta funktionen 1 gör en *udda* periodisk utvidgning i intervallet.)

4.8.* Lös följande problem med hjälp av variabelseparation:

$$\begin{aligned} u'_t &= u''_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin(\pi x) - 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}x\right),\ 0 < x < 3, \\ u(0,t) &= u(3,t) = 0,\ t > 0. \end{aligned}$$

4.9. **[S]** Lös följande problem:

$$\begin{aligned} u'_t &= u''_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin^2 x,\ 0 < x < \pi, \\ u'_x(0,t) &= u'_x(\pi,t) = 0,\ t > 0. \end{aligned}$$

4.10. Lös följande problem

$$\begin{aligned} u''_{tt} &= u''_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin x,\ 0 < x < \pi, \\ u'_t(x,0) &= 1,\ 0 < x < \pi, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0,\ t > 0. \end{aligned}$$