LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET
Avdelningen för fysik

Tentamen i: STATISTISK MEKANIK OCH TERMODYNAMIK 2000-04-25 (MTF072)
Lösningsförslag

---

1. I 3D Ising på kubiskt gitter har spinnet 6 närmsta grannar, och i MF approximerar vi grannarna till $< m >$ och spinnet vi utför beräkningen på kan anta $s_i = \pm 1$.. Detta ger $Z = \sum_i e^{-\epsilon_i/\tau} = e^{+6m/\tau} + e^{-6m/\tau}$ Magnetisering blir $< m >= \frac{+1e^{+6m/\tau} - 1e^{-6m/\tau}}{e^{+6m/\tau} + e^{-6m/\tau}} = \tanh(\frac{6m}{\tau})$. Då argumentet m litet $\tanh x \approx x - x^3/3$. Detta ger $m = \frac{6m}{\tau} - (\frac{6m}{\tau})^3 \frac{1}{3}$ ger ekvationen $m^2 = \frac{3\tau^2}{216}(6-\tau)$ lösning nära $m = 0$ då är $\tau \approx \tau_c$: $m^2 = \frac{3\tau_c^2}{216}(6-\tau)$ och $m = \frac{\sqrt{3}\tau_c}{\sqrt{216}}\sqrt{(6-\tau)}$ vilket ger exponenten $\beta = \frac{1}{2}$.

2. $\epsilon(j) = j(j+1)\epsilon_0$ och $g(j) = 2j+1$ ger partitionsfunktionen $Z_R(\tau) = \sum e^{-\epsilon_i/\tau} = \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)e^{-j(j+1)\epsilon_0/\tau}$. Gränsen $\tau >> \epsilon_0$ hög temp $Z_R(\tau) \approx \int_0^\infty (2j+1)e^{-j(j+1)\epsilon_0/\tau}\,\mathrm{d}j$, byt variabler ($j(j+1) = x^2$ och $\mathrm{d}j(2j+1) = 2x\ \mathrm{d}x$), $= \int_0^\infty 2xe^{-x^2\epsilon_0/\tau}\ \mathrm{d}x = [-\frac{\tau}{\epsilon_0}e^{-x^2\epsilon_0/\tau}]_0^\infty = \frac{\tau}{\epsilon_0}$

   C_v, (hög temp) fria energin $F = -\tau \ln Z_R \approx= -\tau \ln \frac{\tau}{\epsilon_0}$, entropin $\sigma = -\frac{\partial F}{\partial \tau} \approx \ln \frac{\tau}{\epsilon_0} + 1$, och $C_v = \tau\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \approx 1$. dvs $C_v = 1k_B$ per molekyl i hög temp gräns. Låg temp, $\tau << \epsilon_0$ ger $Z_R(\tau) \approx 1 + 3e^{-2\epsilon_0/\tau}$ och $F = -\tau \ln(1+3e^{-2\epsilon_0/\tau})$ och $\sigma = -\frac{\partial F}{\partial \tau} = \ln(1+3e^{-2\epsilon_0/\tau}) + \tau\frac{1}{1+3e^{-2\epsilon_0/\tau}} \cdot \frac{6\epsilon_0}{\tau^2}e^{-2\epsilon_0/\tau}$. Detta ger $C_v = \tau\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = ... = \frac{18\epsilon_0^2 e^{-2\epsilon_0/\tau}}{\tau^2(1+3e^{-2\epsilon_0/\tau})}\left[1 - \frac{e^{-2\epsilon_0/\tau}}{1+3e^{-2\epsilon_0/\tau}}\right]$ approximera $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ då x litet ger $C_v \approx \frac{18\epsilon_0^2 e^{-2\epsilon_0/\tau}}{\tau^2}(1-3e^{-2\epsilon_0/\tau})(1-e^{-2\epsilon_0/\tau}(1-3e^{-2\epsilon_0/\tau})) \approx \frac{18\epsilon_0^2 e^{-2\epsilon_0/\tau}}{\tau^2}$. Svar $\tau >> \epsilon_0 : C_v = 1$, och $Z_R(\tau) = \frac{\tau}{\epsilon_0}$ och för $\tau << \epsilon_0 : C_v = \frac{18\epsilon_0^2 e^{-2\epsilon_0/\tau}}{\tau^2}$, och $Z_R(\tau) = 1 + 3e^{-2\epsilon_0/\tau}$

3. Se lösning till uppgift 3 kapitel 7.

4. Fördelningen inne i lådan: $P(v) = 4\pi(\frac{M}{2\pi\tau})^{3/2}v^2 e^{-Mv^2/2\tau}$ i strålen ut ur ugnen är fördelningen $\propto vP(v)$ (sid 395 CK). Mest sannolika hastigheten ges av maximum av $\propto vP(v)$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(v^3 e{-}Mv^2/2\tau = ... = e^{-Mv^2/2\tau}(3v^2 - v^4 M/\tau) = 0$. Ger mest sannolika hastigheten $v_{ms} = \sqrt{\frac{3\tau}{M}}$. Tiden det tar för trumman att rotera 1/2 varv är lika med tiden det tar för en Na med v_{ms} att färdas genom trumman sträckan d, kalla denna tid $t_{1/2}$. $t_{1/2} \cdot v_{ms} = d$. Vinkelhastigheten $\omega = \frac{2\pi}{2t_{1/2}} = \frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{3\tau}{M}} = \frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{3k_BT}{M}} = \frac{\pi}{0.10}\sqrt{\frac{3 \cdot 1.3807 \cdot 10^{-23} \cdot 573.1}{22.9898 \cdot 1.661 \cdot 10^{-27}}} = 24769.826 \approx 2.48 \cdot 10^4$rad/s (=3942.2402 varv/s)

5. Två energier $\epsilon_i = \pm 3.0010^4 \cdot 1.00\ 10^{-4} \cdot 0.92710^{-20} \cdot 1.00\ 10^{-8} \cdot 1.00\ 10^4\mathrm{J} = 2.781\ 10^{-24}\mathrm{J}$. Partitions funktion för en partikel $Z(T) = e^{-\epsilon_1/k_BT} + e^{-\epsilon_2/k_BT}$. Låt ϵ_1 vara den lägre energin dvs tillståndet som är parallellt med B-fältet. Sannolikheten för detta tillstånd blir då: $< \text{para} >= \frac{e^{-\epsilon_1/k_BT}}{e^{-\epsilon_1/k_BT} + e^{-\epsilon_2/k_BT}}$ Temperaturen ges av $x =< \text{para} >= 0.75$ och sätt $\epsilon =\mid \epsilon_i \mid$ då blir $T = \frac{2\epsilon}{k_B \ln(\frac{x}{1-x})} = 0.36668\mathrm{K} \approx 0.37\mathrm{K}$. I b uppgift $\epsilon = 3.0010^4 \cdot 1.00\ 10^{-4} \cdot 1.4110^{-23} \cdot 1.00\ 10^{-8} \cdot 1.00\ 10^4\mathrm{J} = 4.23\ 10^{-27}\mathrm{J}$ och motsvarande $T = 0.0005577333\mathrm{K} \approx 0.56\mathrm{mK}$.