LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET
Avdelningen för fysik

Tentamen i: STATISTISK MEKANIK OCH TERMODYNAMIK 2000-08-23 (MTF072)
Lösningsförslag

---

1. $\epsilon_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ ger $Z = \sum e^{-(n+\frac{1}{2})\hbar\omega/\tau} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/\tau} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2\tau}} \frac{1}{1-e^{-\hbar\omega/\tau}}$ då blir den fria energin $F = -\tau \ln Z = \frac{\hbar\omega}{2} + \tau \ln\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}\right)$ och för entropin $\sigma = -\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)_{V,N} = -\ln\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}\right) + \frac{\hbar\omega/\tau}{e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}}-1}$ och $C_v = \tau\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} = \left(\frac{\hbar\omega}{\tau}\right)^2 \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}}-1\right)^2}$ då $\tau \to 0$ blir $C_v \to \left(\frac{\hbar\omega}{\tau}\right)^2 e^{\frac{-\hbar\omega}{\tau}}$ och då $\tau \to \infty$ blir $C_v \to 1$

2. Entropin före i delsystem 1 och 2 ges av $\sigma_{1,2} = N_{1,2}\left[\ln\left(\frac{n_Q}{n_{1,2}}\right) + \frac{5}{2}\right]$ och entropin efter ges av (blandningen har samma temperatur) $\sigma_e = N_e\left[\ln\left(\frac{n_Q}{n_e}\right) + \frac{5}{2}\right]$.

   Då blir entropi ändringen (ökning) $\Delta\sigma = \sigma_e - \sigma_1 - \sigma_2 = 3N\ln\left(\frac{n_Q 3V}{3N} + \frac{5}{2}\right) - 2N\ln\left(\frac{n_Q 2V}{2N} + \frac{5}{2}\right) - N\ln\left(\frac{n_Q V}{N} + \frac{5}{2}\right) = 3N\ln\left(\frac{n_Q 3V}{3N}\right) - 2N\ln\left(\frac{n_Q 2V}{2N}\right) - N\ln\left(\frac{n_Q V}{N}\right) = 3N\ln n_Q - 2N\ln n_Q - N\ln n_Q + 3N\ln 3V - 2N\ln 2V - N\ln V - 3N\ln 3N + 2N\ln 2N + N\ln N = N\left(\ln(27V^3 2^{-2}V^{-2}V^{-1}) - \ln(27N^3 2^{-2}N^{-2}N^{-1})\right) = N\ln(3^0 2^0 V^0 N^0) = 0$

3. Följande antal tillstånd finns för hemoglogin med 0, 1, 2, 3 eller 4 syremolekyler: 1, 4, 6, 4 och 1. Kemiska aktiviteten för O_2 är $\lambda = e^{\mu/\tau}$, ϵ är energin för en bunden O_2. Stora tillstånds summan är $Z = 1 + 4\lambda e^{-\epsilon/\tau} + 6\lambda^2 e^{-2\epsilon/\tau} + 4\lambda^3 e^{-3\epsilon/\tau} + \lambda^4 e^{-4\epsilon/\tau}$. sannolikheten för 1 syremolekyl $P(1) = \frac{4\lambda e^{-\epsilon/\tau}}{Z}$ och sannolikheten för 4 syremolekyler $P(4) = \frac{\lambda^4 e^{-4\epsilon/\tau}}{Z}$. Figuren över $P(1)$ kommer $P(1)$ att uppvisa ett maximum vid något λ och figuren över $P(4)$ kommer $P(4)$ att gå från 0 mot 1 med ökande λ.

4. Fasseparation finns behandlat i boken kap 11, några punkter: blandnings entropi $\sigma_M = -N[(1-x)\ln(1-x) + x\ln(x)]$. Bilda fria energin $f = u - \tau\sigma$ (per atom). Studium av figur $\frac{\sigma_M}{N}$ vs x och fig I i uppgiften ger en total fri energi som ger fasseparation med två olika koncentrationer x. Fig II ger ingen separation.

5. Fördelningen inne i lådan: $P(v) = 4\pi(\frac{M}{2\pi\tau})^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2\tau}$ i strålen ut ur ugnen är fördelningen $\propto vP(v)$ (sid 395 CK). Mest sannolika hastigheten ges av maximum av $\propto vP(v)$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(v^3 e{-}Mv^2/2\tau = ... = e^{-Mv^2/2\tau}(3v^2 - v^4 M/\tau) = 0$. Ger mest sannolika hastigheten $v_{ms} = \sqrt{\frac{3\tau}{M}}$. Maximum inträffar vid vinkeln $\theta = 2\pi\frac{63}{94.5} = 4.189$ rad vilket motsvara tiden $t = 2.094\ 10^{-3}$ detta ger att $v_{ms} = 477.48$m/s vilket ger $T = \frac{v_{ms}^2 M}{3k_B} = \frac{477.48^2 \cdot 65.37 \cdot 1.661 \cdot 10^{-27}}{3 \cdot 1.3807 \cdot 10^{-23}}$K $= 597.6$ K dvs ca 600K