LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET
Avdelningen för fysik

Tentamen i: Statistisk mekanik och termodynamik 2001-12-14 (MTF072)
Lösningsförslag

---

1. Entropin före i delsystem 1 och 2 ges av $\sigma_{1,2} = N\left[\ln\left(\frac{n_{Q_{1,2}}}{n}\right) + \frac{5}{2}\right]$ och entropin efter ges av (vid blandningens temperatur τ_e) $\sigma_e = 2N\left[\ln\left(\frac{n_{Q_e}}{n}\right) + \frac{5}{2}\right]$. Bestäm blandningens τ_e, inre energi ändras ej (inget utbyte med omgivning), $\frac{3}{2}\cdot 2N\cdot\tau_e = \frac{3}{2}\cdot N\cdot(\tau_1+\tau_2)$ ger att $\tau_e = \frac{\tau_1+\tau_2}{2}$. Då blir entropi ändringen (ökning) $\Delta\sigma = \sigma_e - \sigma_1 - \sigma_2 = N\ln\left(\frac{n_{Q_e}^2 n^2}{n^2 n_{Q_1} n_{Q_2}}\right) = N\frac{3}{2}\ln\left(\frac{\tau_e^2}{\tau_1\tau_2}\right) = N\frac{3}{2}\ln\left(\frac{(\tau_1+\tau_2)^2}{4\tau_1\tau_2}\right)$.

2. $Z = 1 + 3e^{-\epsilon/\tau}$ och $U =< \epsilon >= \frac{0+3\epsilon e^{-\epsilon/\tau}}{1+3e^{-\epsilon/\tau}} = \frac{3\epsilon}{3+e^{\epsilon/\tau}} = \frac{3\epsilon}{3+e^{\epsilon/k_BT}}$ allternativt derivera Z vilket ger $U = \tau^2\frac{\partial \ln Z}{\partial\tau} = \tau^2\frac{1}{Z}3e^{-\epsilon/\tau}\frac{\epsilon}{\tau^2} = \frac{3\epsilon}{3+e^{\epsilon/\tau}} = \frac{3\epsilon}{3+e^{\epsilon/k_BT}}$ derivering m.a.p. τ ger $C_v = \frac{\partial U}{\partial\tau} = \frac{3\epsilon^2 e^{\epsilon/\tau}/\tau^2}{(3+e^{\epsilon/\tau})^2} = \frac{3x^2e^x}{(3+e^x)^2}$ där $x = \epsilon/\tau$. Derivera m.a.p. x för att hitta max. $\frac{(2x+x^2)e^x}{3+e^x)^2} - \frac{2x^2e^{2x}}{(3+e^x)^3} = 0$ vilket ger $(x+2)(3+e^x) = 2xe^x$ eller $x = \ln(3\frac{x+2}{x-2})$. Detta löses med hjälp av miniräknare eller grafiskt. Lösning $x \approx 2.845$ dvs $\epsilon = x\ \tau = x\ k_B\ T = 2.845\cdot 1.3807\cdot 10^{-23}\cdot 350 = 1.37\cdot 10^{-20}\mathrm{J} = 0.086\mathrm{eV}$.

3. Fermihastigheten $v_F = \sqrt{\frac{2\epsilon_F}{m}}$. Tillståndstätheten: $D(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\epsilon}$ Då blir medelhastigheten per partikel $\langle v\rangle = \frac{1}{N}\int_0^{\epsilon_F}\sqrt{\frac{2\epsilon}{m}}D(\epsilon)\ d\epsilon = \frac{1}{N}\int_0^{\epsilon_F}\sqrt{\frac{2\epsilon}{m}}\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\epsilon}\ d\epsilon = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{2}{m}}\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\epsilon_F^2}{2}$. förenkla med hjälp av $N = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon)\ d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F}\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\epsilon}\ d\epsilon = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2\epsilon_F\sqrt{\epsilon_F}}{3}$ använd detta i för att eliminera N och V i $\langle v\rangle$. Detta blir då $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{2}{m}}\ \frac{\epsilon_F^2}{2}\ \frac{3}{2\epsilon_F\sqrt{\epsilon_F}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2\epsilon_F}{m}} = \frac{3}{4}v_F$.

   Motsvarande räkning för $\langle v^2\rangle = \frac{1}{N}\int_0^{\epsilon_F}\frac{2\epsilon}{m}\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\epsilon}\ d\epsilon = \frac{1}{N}\frac{2}{m}\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2\epsilon_F^{\frac{5}{2}}}{5}$ förkortning ger $\langle v^2\rangle = \frac{2}{m}\ \frac{2\epsilon_F^2\sqrt{\epsilon_F}}{5}\ \frac{3}{2\epsilon_F\sqrt{\epsilon_F}} = \frac{3}{5}\frac{2\epsilon_F}{m} = \frac{3}{5}v_F^2$.

4. DNA, tillstånden är: **0** brutna energin $= 0\epsilon$ antal tillstånd $=g^0 = 1$, **1** bruten energin $= 1\epsilon$ och antal tillstånd $=g$, **2** brutna energin $= 2\epsilon$ och antal tillstånd $=g^2$, **3** brutna energin $= 3\epsilon$ och antal tillstånd $=g^3$ osv. För N länkar blir tillståndsumman en geometrisk summa. $Z^{(N)} = \sum_{N_b=0}^{N} g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}$, som kan räknas ut explicit till $Z^{(N)} = \frac{1-(ge^{-\epsilon/\tau})^{N+1}}{1-ge^{-\epsilon/\tau}}$ För konvergens av serien (då $N\to\infty$ krävs att $ge^{-\epsilon/\tau} < 1$.

   Börja med fallet $ge^{-\epsilon/\tau} < 1$ och låt $N\to\infty$ sannolikheten för ett tillstånd med N_b brutna bindningar blir då $f_b = \frac{g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}}{Z} = \frac{g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}(1-ge^{-\epsilon/\tau})}{1-(ge^{-\epsilon/\tau})^{N+1}} \approx \frac{g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}(1-ge^{-\epsilon/\tau})}{1} = g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}(1-ge^{-\epsilon/\tau})$ och detta är noll för tillstånde med stort antal brutna bindningar.

   Fallet $ge^{-\epsilon/\tau} > 1$ och låt N vara ett stort tal. sannolikheten för ett tillstånd med N_b brutna bindningar blir då $f_b = \frac{g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}}{Z} = \frac{g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}(ge^{-\epsilon/\tau}-1)}{(ge^{-\epsilon/\tau})^{N+1}-1} \approx \frac{g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}(ge^{-\epsilon/\tau}-1)}{(ge^{-\epsilon/\tau})^{N+1}}$

   Sannolikheten för att $N_b = N$: $f_b = \frac{(ge^{-\epsilon/\tau}-1)}{(ge^{-\epsilon/\tau})^1} = 1 - \frac{1}{ge^{-\epsilon/\tau}}$
   Sannolikheten för att $N_b = N-1$: $f_b = \frac{(ge^{-\epsilon/\tau}-1)}{(ge^{-\epsilon/\tau})^2} = \frac{1}{ge^{-\epsilon/\tau}} - \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^2}$
   Sannolikheten för att $N_b = N-2$: $f_b = \frac{(ge^{-\epsilon/\tau}-1)}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3} = \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^2} - \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3}$
   Sannolikheten för att $N_b = N-2$: $f_b = \frac{(ge^{-\epsilon/\tau}-1)}{(ge^{-\epsilon/\tau})^4} = \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3} - \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^4}$ osv.
   Bilda nu väntevärdet av antalet brutna bindningar: $F_b = \frac{N}{N}(1-\frac{1}{ge^{-\epsilon/\tau}}) + \frac{N-1}{N}(\frac{1}{ge^{-\epsilon/\tau}} - \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^2}) + \frac{N-2}{N}(\frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^2} - \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3}) + \frac{N-3}{N}(\frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3} - \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^4}) + ... = 1 - \frac{1}{N}\frac{1}{ge^{-\epsilon/\tau}} - \frac{1}{N}\frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^2} - \frac{1}{N}\frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3} -$

$\frac{1}{N}\frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3} - \frac{1}{N}\frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^4} - ... = 1 - \frac{1}{N}(\text{konvergerande geometrisk summa}) \to 1$ då $N \to \infty$. Antingen är andelen brutna bindningar 0 (betyder väldigt få brutna) eller så är andelen 1 dvs hela DNA molekylen är öppnad.

5. Fördelningen inne i lådan: $P(v) = 4\pi(\frac{M}{2\pi\tau})^{3/2}v^2e^{-Mv^2/2\tau}$ i strålen ut ur ugnen är fördelningen $\propto vP(v)$ (sid 395 CK). Mest sannolika hastigheten ges av maximum av $\propto vP(v)$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(v^3e{-}Mv^2/2\tau = ... = e^{-Mv^2/2\tau}(3v^2 - v^4M/\tau) = 0$. Ger mest sannolika hastigheten $v_{ms} = \sqrt{\frac{3\tau}{M}}$. Med givna data fås hastigheterna $v_{63} = 1126.09$m/s och $v_{65} = 1108.61$m/s motsvarande tider för att förflyttas sträckan d blir: $t_{63} = 8.8803 \cdot 10^{-5}$s och $t_{65} = 9.0203 \cdot 10^{-5}$s och $\Delta t = 1.40005 \cdot 10^{-6}$s. Vartalet var 2200 varv/s detta ger en hastighet i periferin på $v_p = 2200\ \pi\ 0.10 = 691.15$m/s och således blir sträckan $s = 691.15 \cdot 1.40005 \cdot 10^{-6}$m $= 0.9676$ mm.

   Om d fördubblas ökar Δt en faktor 2 och v_p ökar också en faktor 2 totalt ökar separationen en faktor 4. Således kan man sänka varvtalet med en faktor 4 med bibehållen separation.