LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET
Avdelningen för fysik

Tentamen i: Statistisk mekanik och termodynamik 2003-01-17 (MTF072)
Lösningsförslag / Suggested solutions

---

1. a) $\frac{1}{\tau} = \frac{\partial\sigma}{\partial E} = \frac{8\pi GM}{\hbar c^3}$

   b) $U = \frac{3}{2}\tau = 1$ eV will give ratio $\frac{18e^{13.6/3^2\tau}}{8e^{13.6/2^2\tau}} = \frac{18}{8}e^{20.4(1/9-1/4)/\tau} = \frac{18}{8}e^{-2.833/\tau} = 0.13$

2. Trycket ges av $P = k_BT\left(\frac{\partial\ln Z}{\partial V}\right)_T = \frac{Nk_BT}{V-bN} - \frac{aN^2}{V^2}$ vilket kan skrivas som $\left(P + \frac{aN^2}{V^2}\right)(V-bN) = Nk_BT$. Inre energin ges av $U = k_BT^2\left(\frac{\partial\ln Z}{\partial T}\right)_V = N\left(\frac{3k_BT}{2} - \frac{aN}{V}\right)$

3. **a**) $<\nu>=\nu_0(1+<v_x>/c)$ and $<v_x>$ is equal to zero due to symmetry and hence $<\nu>=\nu_0$.

   b) $\sqrt{<(\nu-<\nu>)^2>} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{<v_x^2>}$ and $<v_x^2>= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2\tau}}dv_x}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2\tau}}dv_x} = ... = \frac{\tau}{m}$ and hence $\sqrt{<(\nu-<\nu>)^2>} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{\tau}{m}}$

4. $Z = 1 + e^{\frac{mB}{\tau}} + e^{-\frac{mB}{\tau}} \approx 1 + 1 + \frac{mB}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2 + 1 - \frac{mB}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2 = 3(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2)$ $F = -\tau\ln Z = -\tau\left[\ln 3 + \ln(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2)\right] \approx -\tau\left[\ln 3 + \frac{1}{3}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2)\right]$ $\sigma = -\frac{\partial F}{\partial\tau}_V = \ln 3 - \frac{1}{3}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2)$. The decrease in entropy is $\frac{1}{3}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2)$ and $A = \frac{1}{3}(mB)^2$

5. Det finns två sätt att lösa uppgiften. Dels kan man separera den två dimensionella till två stycken en dimensionella eller så inför man en tillstå ndtäthet $g(n)$. Här väljer jag det senare. Tillståndstätheten $g(n)$ ges av $g(n) = n + 1$. $\epsilon_n = (n_x + n_y + \frac{2}{2})\hbar\omega$ och sätt $n = n_x + n_y$ ger $Z = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)e^{-(n+1)\hbar\omega/\tau} = e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}\sum_{n=0}^{\infty}[ne^{-n\hbar\omega/\tau} + e^{-n\hbar\omega/\tau}] = e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}[\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}}{(1-e^{-\hbar\omega/\tau})^2} + \frac{1}{1-e^{-\hbar\omega/\tau}}] = \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}}}{(e^{\hbar\omega/\tau}-1)^2} = \frac{1}{2(\cosh(\hbar\omega/\tau)-1)}$ då blir den fria energin $F = -\tau\ln Z = -\hbar\omega + 2\tau\ln\left(e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}} - 1\right) = \hbar\omega + 2\tau\ln\left(1 - e^{\frac{-\hbar\omega}{\tau}}\right)$ och för entropin $\sigma = -\left(\frac{\partial F}{\partial\tau}\right)_{V,N} = -2\ln\left(e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}} - 1\right) + \frac{2\hbar\omega/\tau}{\tau}\frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}}$ och $C_v = \tau\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} = 2\left(\frac{\hbar\omega}{\tau}\right)^2\frac{e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}}-1\right)^2}$ då $\tau \to 0$ blir $C_v \to 2\left(\frac{\hbar\omega}{\tau}\right)^2 e^{\frac{-\hbar\omega}{\tau}}$ och då $\tau \to \infty$ blir $C_v \to 2$