LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET
Avdelningen för fysik

Tentamen i: STATISTISK MEKANIK OCH TERMODYNAMIK 2003-08-28 (MTF072)
Lösningsförslag / Suggested solutions

---

1. $\epsilon(j) = j(j+1)\epsilon_0$ och $g(j) = 2j+1$ ger partitionsfunktionen $Z_R(\tau) = \sum e^{-\epsilon_i/\tau} = \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)e^{-j(j+1)\epsilon_0/\tau}$. Gränsen $\tau >> \epsilon_0$ hög temp $Z_R(\tau) \approx \int_0^{\infty}(2j+1)e^{-j(j+1)\epsilon_0/\tau}\,\mathrm{d}j$, byt variabler ($j(j+1) = x^2$ och $\mathrm{d}j(2j+1) = 2x\,\mathrm{d}x$), $= \int_0^{\infty} 2xe^{-x^2\epsilon_0/\tau}\,\mathrm{d}x = [-\frac{\tau}{\epsilon_0}e^{-x^2\epsilon_0/\tau}]_0^{\infty} = \frac{\tau}{\epsilon_0}$

   C_v, (hög temp) fria energin $F = -\tau\ln Z_R \approx= -\tau\ln\frac{\tau}{\epsilon_0}$, entropin $\sigma = -\frac{\partial F}{\partial\tau} \approx \ln\frac{\tau}{\epsilon_0} + 1$, och $C_v = \tau\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} \approx 1$. dvs $C_v = 1k_B$ per molekyl i hög temp gräns. Låg temp, $\tau << \epsilon_0$ ger $Z_R(\tau) \approx 1 + 3e^{-2\epsilon_0/\tau}$ och $F = -\tau\ln(1 + 3e^{-2\epsilon_0/\tau})$ och $\sigma = -\frac{\partial F}{\partial\tau} = \ln(1 + 3e^{-2\epsilon_0/\tau}) + \tau\frac{1}{1+3e^{-2\epsilon_0/\tau}} \cdot \frac{6\epsilon_0}{\tau^2}e^{-2\epsilon_0/\tau}$. Detta ger $C_v = \tau\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} = ... = \frac{18\epsilon_0^2 e^{-2\epsilon_0/\tau}}{\tau^2(1+3e^{-2\epsilon_0/\tau})}\left[1 - \frac{e^{-2\epsilon_0/\tau}}{1+3e^{-2\epsilon_0/\tau}}\right]$ approximera $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ då x litet ger $C_v \approx \frac{18\epsilon_0^2 e^{-2\epsilon_0/\tau}}{\tau^2}(1 - 3e^{-2\epsilon_0/\tau})(1 - e^{-2\epsilon_0/\tau}(1 - 3e^{-2\epsilon_0/\tau})) \approx \frac{18\epsilon_0^2 e^{-2\epsilon_0/\tau}}{\tau^2}$. Svar $\tau >> \epsilon_0 : C_v = 1$, och $Z_R(\tau) = \frac{\tau}{\epsilon_0}$ och för $\tau << \epsilon_0 : C_v = \frac{18\epsilon_0^2 e^{-2\epsilon_0/\tau}}{\tau^2}$, och $Z_R(\tau) = 1 + 3e^{-2\epsilon_0/\tau}$

2. Se lösning till uppgift 3 kapitel 7.

3. Fördelningen inne i lådan: $P(v) = 4\pi(\frac{M}{2\pi\tau})^{3/2}v^2e^{-Mv^2/2\tau}$ i strålen ut ur ugnen är fördelningen $\propto vP(v)$ (sid 395 CK). Mest sannolika hastigheten ges av maximum av $\propto vP(v)$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(v^3e{-}Mv^2/2\tau = ... = e^{-Mv^2/2\tau}(3v^2 - v^4M/\tau) = 0$. Ger mest sannolika hastigheten $v_{ms} = \sqrt{\frac{3\tau}{M}}$. Tiden det tar för trumman att rotera 1/2 varv är lika med tiden det tar för en Na med v_{ms} att färdas genom trumman sträckan d, kalla denna tid $t_{1/2}$. $t_{1/2} \cdot v_{ms} = d$. Vinkelhastigheten $\omega = \frac{2\pi}{2t_{1/2}} = \frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{3\tau}{M}} = \frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{3k_BT}{M}} = \frac{\pi}{0.10}\sqrt{\frac{3\cdot 1.3807\cdot 10^{-23}\cdot 573.1}{22.9898\cdot 1.661\cdot 10^{-27}}} = 24769.826 \approx 2.48 \cdot 10^4$rad/s (=3942.2402 varv/s)

4. DNA, tillstånden är: **0** brutna energin = 0ϵ antal tillstånd $=g^0 = 1$, **1** bruten energin = 1ϵ och antal tillstånd $=g$, **2** brutna energin = 2ϵ och antal tillstånd $=g^2$, **3** brutna energin = 3ϵ och antal tillstånd $=g^3$ osv. För N länkar blir tillståndsumman en geometrisk summa. $Z^{(N)} = \sum_{N_b=0}^{N} g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}$, som kan räknas ut explicit till $Z^{(N)} = \frac{1-(ge^{-\epsilon/\tau})^{N+1}}{1-ge^{-\epsilon/\tau}}$ För konvergens av serien (då $N \to \infty$ krävs att $ge^{-\epsilon/\tau} < 1$.

   Börja med fallet $ge^{-\epsilon/\tau} < 1$ och låt $N \to \infty$ sannolikheten för ett tillstånd med N_b brutna bindningar blir då $f_b = \frac{g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}}{Z} = \frac{g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}(1-ge^{-\epsilon/\tau})}{1-(ge^{-\epsilon/\tau})^{N+1}} \approx \frac{g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}(1-ge^{-\epsilon/\tau})}{1} = g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}(1 - ge^{-\epsilon/\tau})$ och detta är noll för tillstånde med stort antal brutna bindningar.

   Fallet $ge^{-\epsilon/\tau} > 1$ och låt N vara ett stort tal. sannolikheten för ett tillstånd med N_b brutna bindningar blir då $f_b = \frac{g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}}{Z} = \frac{g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}(ge^{-\epsilon/\tau}-1)}{(ge^{-\epsilon/\tau})^{N+1}-1} \approx \frac{g^{N_b}e^{-N_b\epsilon/\tau}(ge^{-\epsilon/\tau}-1)}{(ge^{-\epsilon/\tau})^{N+1}}$

   Sannolikheten för att $N_b = N$: $f_b = \frac{(ge^{-\epsilon/\tau}-1)}{(ge^{-\epsilon/\tau})^1} = 1 - \frac{1}{ge^{-\epsilon/\tau}}$
   Sannolikheten för att $N_b = N - 1$: $f_b = \frac{(ge^{-\epsilon/\tau}-1)}{(ge^{-\epsilon/\tau})^2} = \frac{1}{ge^{-\epsilon/\tau}} - \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^2}$
   Sannolikheten för att $N_b = N - 2$: $f_b = \frac{(ge^{-\epsilon/\tau}-1)}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3} = \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^2} - \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3}$
   Sannolikheten för att $N_b = N - 2$: $f_b = \frac{(ge^{-\epsilon/\tau}-1)}{(ge^{-\epsilon/\tau})^4} = \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3} - \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^4}$ osv.
   Bilda nu väntevärdet av antalet brutna bindningar: $F_b = \frac{N}{N}(1 - \frac{1}{ge^{-\epsilon/\tau}}) + \frac{N-1}{N}(\frac{1}{ge^{-\epsilon/\tau}} - \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^2}) + \frac{N-2}{N}(\frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^2} - \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3}) + \frac{N-3}{N}(\frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3} - \frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^4}) + ... = 1 - \frac{1}{N}\frac{1}{ge^{-\epsilon/\tau}} - \frac{1}{N}\frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^2} - \frac{1}{N}\frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3} - \frac{1}{N}\frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^3} - \frac{1}{N}\frac{1}{(ge^{-\epsilon/\tau})^4} - ... = 1 - \frac{1}{N}(\text{konvergerande geometrisk summa}) \to 1$ då

$N \to \infty$. Antingen är andelen brutna bindningar 0 (betyder väldigt få brutna) eller så är andelen 1 dvs hela DNA molekylen är öppnad.

5. 2 particles A and B, 3 states with energy 0, ϵ and 3ϵ **a**) Classical

state	0	ϵ	3ϵ	energy
1	AB	-	-	0
2	-	AB	-	2ϵ
3	-	-	AB	6ϵ
4	A	B	-	ϵ
5	B	A	-	ϵ
6	A	-	B	3ϵ
7	B	-	A	3ϵ
8	-	A	B	4ϵ
9	-	B	A	4ϵ

and $Z = 1 + 2e^{-\epsilon/\tau} + e^{-2\epsilon/\tau} + 2e^{-3\epsilon/\tau} + 2e^{-4\epsilon/\tau} + e^{-6\epsilon/\tau}$

b) Bosons

state	0	ϵ	3ϵ	energy
1	AA	-	-	0
2	-	AA	-	2ϵ
3	-	-	AA	6ϵ
4	A	A	-	ϵ
6	A	-	A	3ϵ
8	-	A	A	4ϵ

and $Z = 1 + e^{-\epsilon/\tau} + e^{-2\epsilon/\tau} + e^{-3\epsilon/\tau} + e^{-4\epsilon/\tau} + e^{-6\epsilon/\tau}$

c) Fermions

state	0	ϵ	3ϵ	energy
4	A	A	-	ϵ
6	A	-	A	3ϵ
8	-	A	A	4ϵ

and $Z = e^{-\epsilon/\tau} + e^{-3\epsilon/\tau} + e^{-4\epsilon/\tau}$