Avdelningen för fysik

Tentamen i: STATISTISK MEKANIK OCH TERMODYNAMIK 2004-01-15 (MTF115)
Lösningsförslag / Suggested solutions

---

1. $\epsilon_j = (j+\frac{1}{2})\hbar\omega$ ger $Z = \sum e^{-(j+\frac{1}{2})\hbar\omega/\tau} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/\tau} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2\tau}} \frac{1}{1-e^{-\hbar\omega/\tau}}$. Vid temperaturen $\tau_{ch} = \hbar\omega$ ges andelen oscillatorer i grundtillståndet av $f_0 = \frac{e^{-\epsilon_0/\tau}}{Z} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{1-e^{-1}} = 0.632$ och nästa ges av $f_1 = \frac{e^{-\epsilon_1/\tau}}{Z} = \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e}\frac{1}{1-e^{-1}} = 0.236$ och nästa blir $f_2 = 0.0855$

2. $C_v = \tau\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right)_v$ **a:** för ledningselektroner $C_v \propto \tau$ vilket ger $\tau \propto \tau\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right)_v$ och därmed är $\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} =$ constant. och $\sigma \propto \tau$+constantII. så om τ ökar från 200K till 800 K då ökar σ med en faktor 4. **b:** för elektromagnetiskt strålningsfällt $C_v \propto \tau^3$. (Jmf Debye). och därmed är $\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} \propto \tau^2$ och $\sigma \propto \tau^3$+constantII. så om temp ökar från 500K till 2000K så ökar σ med en faktor 64.

3. Count the states in a box of size L. After some steps one reaches at (eq 7 page 185 KK) $\tau_F = (3\pi^2 n)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m}$ this gives $T_F = k_B\tau_F = 5.0$K which much more than $T = 0.5K$ so the approximation of the Fermi-Dirac distribution function as a step function will be fairly good. Calculate U (along lines according to eq 27 page 189 KK) after some steps $C_v = \frac{1}{2}\pi^2 N k_B T/T_F$ is reached. Evaluating the fermi contribution gives $C_v = 0.098 N k_B =$ 0.820 J/mole/K (= 0.272 kJ/kg/K) at $T = 0.1$K.

4. I 3D Ising på kubiskt gitter har spinnet 6 närmsta grannar, och i MF approximerar vi grannarna till $< m >$ och spinnet vi utför beräkningen på kan anta $s_i = \pm 1$.. Detta ger $Z = \sum_i e^{-\epsilon_i/\tau} = e^{+6m/\tau} + e^{-6m/\tau}$ Magnetisering blir $< m > = \frac{+1e^{+6m/\tau} - 1e^{-6m/\tau}}{e^{+6m/\tau} + e^{-6m/\tau}} = \tanh(\frac{6m}{\tau})$. Då argumentet m litet $\tanh x \approx x - x^3/3$. Detta ger $m = \frac{6m}{\tau} - (\frac{6m}{\tau})^3\frac{1}{3}$ ger ekvationen $m^2 = \frac{3\tau^2}{216}(6-\tau)$ lösning nära $m=0$ då är $\tau \approx \tau_c$: $m^2 = \frac{3\tau_c^2}{216}(6-\tau)$ och $m = \frac{\sqrt{3}\tau_c}{\sqrt{216}}\sqrt{(6-\tau)}$ vilket ger exponenten $\beta = \frac{1}{2}$.

5. a) Energi tätheten ges av (efter en del räknande enligt KK93-94) $\frac{U}{V} = \frac{\pi^2\tau^4}{15\hbar^3 c^3}$

   b+c) $d\sigma = dU/\tau$ ger efter integrering (KK95) $\sigma = \frac{4\pi^2\tau^3 V}{45\hbar^3 c^3}$ sedan $\frac{p}{\tau} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial V}\right)_U$. Först måste dock τ elimineras ur uttrycket för σ med hjälp av uttrycket för energitätheten enligt uppgift a. $\tau^3 = \left(\frac{U}{V}\right)^{3/4}\left(\frac{15\hbar^3c^3}{\pi^2}\right)^{3/4}$ vilket ger för entropin $\sigma = \frac{4\pi^2}{45\hbar^3c^3}(U)^{3/4}\left(\frac{15\hbar^3c^3}{\pi^2}\right)^{3/4}(V)^{1/4}$. Detta uttryck innehåler inte variablerna U eller V via variabeln τ.
   Nu ges trycket av $\frac{p}{\tau} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial V}\right)_U$ vilket ger $\frac{p}{\tau} = \frac{4\pi^2}{45\hbar^3c^3}(U)^{3/4}\left(\frac{15\hbar^3c^3}{\pi^2}\right)^{3/4}\frac{1}{4}(V)^{-3/4} =$ byt tillbaka till τ igen $= \frac{4\pi^2}{45\hbar^3c^3}\left(\frac{15\hbar^3c^3}{\pi^2}\right)^{3/4}\frac{1}{4}\left(\frac{15\hbar^3c^3}{\pi^2}\right)^{-3/4}\tau^3 = \frac{\pi^2}{45\hbar^3c^3}\tau^3$. Vilket ger $p = \frac{\pi^2}{45\hbar^3c^3}\tau^4$ och med utrycket för energitätheten ger detta: $pV = \frac{1}{3}U$