LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET
Avdelningen för fysik

Tentamen i: STATISTISK MEKANIK OCH TERMODYNAMIK 2004-05-04 (MTF072/MTF115)
Lösningsförslag / Suggested solutions

---

1. a) Energin $2,5\hbar\omega$ innebär att ett av kvanttalen är ett medan de övriga är noll. Excitationsriktningen kan väljas på tre sätt. Detta ger en trefaldig degeneration och ekvationen: $e^{-1,5\hbar\omega/k_BT} = 3e^{-2,5\hbar\omega/k_BT}$ eller $e^{\hbar\omega/k_BT} = 3$ som ger $T = \frac{\hbar\omega}{k_B \ln 3}$

   b) Tillståndsumman ges av: $Z = \sum_{n_1=0,n_2=0,n_3=0}^{\infty} e^{-(n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2})\ \hbar\omega/k_BT} = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)e^{-(n+\frac{3}{2})\ \hbar\omega/k_BT}$, där $g(n)$ är degenerationen av energinivåerna. $g(0) = 1, g(1) = 3, g(2) = 6(= 1+2+3), g(3) = 10(= 1+2+3+4), g(4) = 15(= 1+2+3+4+5)$ osv. Vi kan konstruera $g(n) = (n+1)(n+2)/2$ (medelvärdet gånger antalet termer). Tillståndsumman innehåller tre geometriska summor $g(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1$. De tre summorna ges av: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4... = \frac{1}{1-x}$ och $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4.. = \frac{x}{(1-x)^2}$ och $x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4.. = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ (derivera den första på lämpligt vis) detta ger:

$$Z = e^{-\frac{3\hbar\omega}{2\tau}}\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}} + \frac{3}{2}\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}}{(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}})^2} + \frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}(1+e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}})}{(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}})^3}\right)$$

   Med $\tau = \frac{\hbar\omega}{\ln 3}$

$$Z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\,\frac{\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{3}(1+\frac{1}{3})}{(1-\frac{1}{3})^3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 3.375 = 0.649519052$$

   Boltzmann faktorn för grundtillståndet är $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ så blir sannolikheten att systemet är i grundtillståndet $1/3.375 = 0.296296...$

2. $Z = 1 + 2e^{-\epsilon/\tau}$ och $U =<\epsilon>= \frac{0+2\epsilon e^{-\epsilon/\tau}}{1+2e^{-\epsilon/\tau}} = \frac{2\epsilon}{2+e^{\epsilon/\tau}} = \frac{2\epsilon}{2+e^{\epsilon/k_BT}}$ allternativt derivera Z vilket ger $U = \tau^2\frac{\partial \ln Z}{\partial\tau} = \tau^2\frac{1}{Z}2e^{-\epsilon/\tau}\frac{\epsilon}{\tau^2} = \frac{2\epsilon}{2+e^{\epsilon/\tau}} = \frac{2\epsilon}{2+e^{\epsilon/k_BT}}$ derivering m.a.p. τ ger $C_v = \frac{\partial U}{\partial\tau} = \frac{2\epsilon^2e^{\epsilon/\tau}/\tau^2}{(2+e^{\epsilon/\tau})^2} = \frac{2x^2e^x}{(2+e^x)^2}$ där $x = \epsilon/\tau$. Derivera m.a.p. x för att hitta max. $\frac{(2x+x^2)e^x}{3+e^x)^2} - \frac{2x^2e^{2x}}{(3+e^x)^3} = 0$ vilket ger $(x+2)(3+e^x) = 2xe^x$ eller $x = \ln(3\frac{x+2}{x-2})$. Detta löses med hjälp av miniräknare eller grafiskt. Lösning $x \approx 2.845$ dvs $\epsilon = x\ \tau = x\ k_B\ T = 2.845 \cdot 1.3807 \cdot 10^{-23} \cdot 450 = 1.37 \cdot 10^{-20}\mathrm{J} = 0.086\mathrm{eV}$.

3. Claypeyrons ekvation är : $\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T\Delta v} = -\frac{3.689\cdot 10^9}{T}$ ($\Delta v = v_{\text{vätska}} - v_{\text{is}} = \frac{1}{999.8} - \frac{1}{916.8} = -9.0550\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3/kg},\ q = 334\cdot 10^3\ \mathrm{J/kg}$). Detta ger för små temperaturändringar: $\Delta T = -\frac{T\Delta p}{3.689\cdot 10^9} = -0.0666 \approx -0.07\mathrm{K}$, dvs en sänkning av fryspunkten med 0.07K.

4. **a**) $<\nu>= \nu_0(1+<v_x>/c)$ and $<v_x>$ is equal to zero due to symmetry and hence $<\nu>= \nu_0$.

   b) $\sqrt{<(\nu-<\nu>)^2>} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{<v_x^2>}$ and $<v_x^2>= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2\tau}}dv_x}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2\tau}}dv_x} = ... = \frac{\tau}{m}$ and hence $\sqrt{<(\nu-<\nu>)^2>} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{\tau}{m}}$

5. $Z = 1 + e^{\frac{mB}{\tau}} + e^{-\frac{mB}{\tau}} \approx 1 + 1 + \frac{mB}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2 + 1 - \frac{mB}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2 = 3(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2)$ $F = -\tau\ln Z = -\tau\left[\ln 3 + \ln(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2)\right] \approx -\tau\left[\ln 3 + \frac{1}{3}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2)\right]$ $\sigma = -\frac{\partial F}{\partial\tau}_V = \ln 3 - \frac{1}{3}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2)$. The decrease in entropy is $\frac{1}{3}\left(\frac{mB}{\tau}\right)^2)$ and $A = \frac{1}{3}(mB)^2$