LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET
Avdelningen för fysik

Tentamen i: STATISTISK MEKANIK OCH TERMODYNAMIK 2005-01-15 (MTF115)
Lösningsförslag / Suggested solutions

---

1. Se boken uppgift 7.1 För en dimension gäller (stav av längd L) $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}n_F\right)^2$ och antalet elektroner i systemet $N = 2n_F$ där $n_F = \sqrt{\frac{2mL^2}{\hbar^2\pi^2}\epsilon_F}$ DOS blir då $D_{1d}(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\sqrt{\frac{2mL^2}{\hbar^2\pi^2}} = \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$
   För två dimensioner gäller $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}n_F\right)^2$ och antalet elektroner i systemet $N = 2\frac{1}{4}\pi n_F^2 = \frac{\pi}{2}\frac{2mL^2}{\hbar^2\pi^2}\epsilon_F$. DOS i två dimensioner blir då $D_{2d}(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{\pi}{2}\frac{2mL^2}{\hbar^2\pi^2}$ dvs en konstant.

2. Fermihastigheten $v_F = \sqrt{\frac{2\epsilon_F}{m}}$. Tillståndstätheten: $D(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\epsilon}$ Då blir medelhastigheten per partikel $\langle v\rangle = \frac{1}{N}\int_0^{\epsilon_F}\sqrt{\frac{2\epsilon}{m}}D(\epsilon)\ d\epsilon = \frac{1}{N}\int_0^{\epsilon_F}\sqrt{\frac{2\epsilon}{m}}\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\epsilon}\ d\epsilon = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{2}{m}}\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\epsilon_F^2}{2}$. förenkla med hjälp av $N = \int_0^{\epsilon_F}D(\epsilon)\ d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F}\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\epsilon}\ d\epsilon = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2\epsilon_F\sqrt{\epsilon_F}}{3}$ använd detta i för att eliminera N och V i $\langle v\rangle$. Detta blir då $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{2}{m}}\frac{\epsilon_F^2}{2}\frac{3}{2\epsilon_F\sqrt{\epsilon_F}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2\epsilon_F}{m}} = \frac{3}{4}v_F$. Motsvarande räkning för $\langle v^2\rangle = \frac{1}{N}\int_0^{\epsilon_F}\frac{2\epsilon}{m}\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\epsilon}\ d\epsilon = \frac{1}{N}\frac{2}{m}\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2\epsilon_F^{\frac{5}{2}}}{5}$ förkortning ger $\langle v^2\rangle = \frac{2}{m}\frac{2\epsilon_F^2\sqrt{\epsilon_F}}{5}\frac{3}{2\epsilon_F\sqrt{\epsilon_F}} = \frac{3}{5}\frac{2\epsilon_F}{m} = \frac{3}{5}v_F^2$.

3. The partition function is $Z_{\text{rot}} = \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)e^{-j(j+1)\frac{\hbar^2}{2I\tau}} \approx 1 + 3e^{-\frac{\hbar^2}{I\tau}} = 1 + 3e^{-x}$ where $x = \frac{\hbar^2}{I\tau} >> 1$ in the high temperature limit. For N identical molecules $Z_{\text{rot}}^{(N)} = \frac{1}{N!}Z_{\text{rot}}^N$, and hence $F_{\text{rot}} = -N\tau\ln Z_{\text{rot}} + \tau\ln N! = -N\tau\ln(1+3e^{-x}) + \tau\ln N! \approx -3N\tau e^{-x} + \tau\ln N! = -3N\tau e^{-\frac{\hbar^2}{I\tau}} + \tau\ln N!$. The entropy is: $\sigma_{\text{rot}} = -(\frac{\partial F}{\partial\tau})_{\text{v}} \approx 3N(1+x)e^{-x} + \ln N! = 3N(1+\frac{\hbar^2}{I\tau})e^{-\frac{\hbar^2}{I\tau}} + \ln N!$ and the specific heat in the low temperature limit is: $(C_v)_{\text{rot}} = \tau(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau})_{\text{v}} \approx 3Nx^2e^{-x} = 3N\left(\frac{\hbar^2}{I\tau}\right)^2 e^{-\frac{\hbar^2}{I\tau}}$. You can also calculate the inner energy $U = -\tau^2(\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{F}{\tau})_{\text{v,N}} = 3N\left(\frac{\hbar^2}{I\tau}\right)e^{-\frac{\hbar^2}{I\tau}}$.

4. a) Energin $2\hbar\omega$ innebär att ett av kvanttalen är ett medan det andra är noll. Excitationsriktningen kan väljas på två sätt. Detta ger en tvåfaldig degeneration. Energin $4\hbar\omega$ innebär att kvanttalskombinationerna $n_1\ n_2 = 3\ 0,\ 0\ 3,\ 1\ 2,\ 2\ 1$. Detta ger en fyrfaldig degeneration och ekvationen: $2e^{-2,0\hbar\omega/k_BT} = 4e^{-4,0\hbar\omega/k_BT}$ eller $e^{2\hbar\omega/k_BT} = 2$ som ger $T = \frac{2\hbar\omega}{k_B\ln 2}$ eller $\tau = \frac{2\hbar\omega}{\ln 2}$

   b) Tillståndsumman ges av: $Z = \sum_{n_1=0,n_2=0}^{\infty}e^{-(n_1+n_2+1)\hbar\omega/k_BT} = \sum_{n=0}^{\infty}g(n)e^{-(n+1)\hbar\omega/k_BT}$, där $g(n)$ är degenerationen av energinivåerna. $g(0) = 1, g(1) = 2\ (=1+1), g(2) = 3\ (=1+2), g(3) = 4\ (=1+3), g(4) = 5\ (=1+4)$ osv. Vi kan konstruera $g(n) = n+1$ (inses med en geometrisk konstruktion sätt n_1 och n_2 på x resp y axeln, $g(n)$ blir då antalet punkter på hypotenusan.) Tillståndsumman innehåller två geometriska summor $g(n) = n+1$. De två summorna ges av: $1+x+x^2+x^3+x^4... = \frac{1}{1-x}$ och $x+2x^2+3x^3+4x^4.. = \frac{x}{(1-x)^2}$ (derivera den första på lämpligt vis, eller se Beta sid 188) detta ger:

$$Z = e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}} + \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}}{(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}})^2}\right) = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}}{(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}})^2}$$

Med $\tau = \frac{2\hbar\omega}{\ln 2}$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)^2}$$

Boltzmann faktorn för $2\hbar\omega$ eller $4\hbar\omega$ tillstånden blir (inklusive degeneration) vid temperaturen τ: $2e^{-2,0\hbar\omega/\tau} = 1$. Sannolikheten blir då $\frac{1}{Z} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}} = 0.12132$.

5. 2 particles A and B, 3 states with energy 0, ϵ and 2ϵ

a) Classical

state	0	ϵ	2ϵ	energy
1	AB	-	-	0
2	-	AB	-	2ϵ
3	-	-	AB	4ϵ
4	A	B	-	ϵ
5	B	A	-	ϵ
6	A	-	B	2ϵ
7	B	-	A	2ϵ
8	-	A	B	3ϵ
9	-	B	A	3ϵ

and $Z = 1 + 2e^{-\epsilon/\tau} + 3e^{-2\epsilon/\tau} + 2e^{-3\epsilon/\tau} + e^{-4\epsilon/\tau}$

b) Bosons

state	0	ϵ	2ϵ	energy
1	AA	-	-	0
2	-	AA	-	2ϵ
3	-	-	AA	4ϵ
4	A	A	-	ϵ
6	A	-	A	2ϵ
8	-	A	A	3ϵ

and $Z = 1 + e^{-\epsilon/\tau} + 2e^{-2\epsilon/\tau} + e^{-3\epsilon/\tau} + e^{-4\epsilon/\tau}$

c) Fermions

state	0	ϵ	2ϵ	energy
4	A	A	-	ϵ
6	A	-	A	2ϵ
8	-	A	A	3ϵ

and $Z = e^{-\epsilon/\tau} + e^{-2\epsilon/\tau} + e^{-3\epsilon/\tau}$