LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET
Avdelningen för fysik

Kurskod	MTF072
Tentamensdatum	2003-01-17
Skrivtid	09.00–14.00

Tentamen i: **STATISTISK MEKANIK OCH TERMODYNAMIK**
Totala antalet uppgifter: 5
Jourhavande lärare: Hans Weber Tel: 492088, Rum E111
Examinator: Hans Weber Tel: 492088, Rum E111
Resultaten anslås : Fredagen den 31 januari 2003 i korridoren, E-huset
Tentamensrättningen får granskas: Tid meddelas senare

Tillåtna hjälpmedel: FYSIKALIA, BETA, Physics handbook, Räknedosa (pocket calculator), Formelblad för Statistisk Mekanik (collection of formulae in Statistical mechanics).

Define notations and motivate assumptions and approximations. Present the solutions so that they are easy to follow.
Definiera beteckningar samt motivera antaganden och approximationer. Presentera lösningarna så att de blir lätta att följa.
Maximalt antal poäng: 25 p. För godkänt krävs 11 p.
Maximum number of point is 25 p. 11 points are required to pass the examination.

---

1. **Astrophysics Black holes and star atmospheres**

a) The entropy of a non–rotating non–charged black hole is given by $\sigma = \frac{c^3 A}{4G\hbar}$ where $A = 4\pi R_s^2$ is the area of the black hole, $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ is the Schwarzschild radius, M is the mass and G is Newton's constant of gravitation. The energy is given by $E = mc^2$. Evaluate the temperature of the black hole.

b) The energy levels of atomic hydrogen are given by: $E_n = -\frac{13.6}{n^2}$ eV, where $n = 1, 2, 3, 4, ...$ is the principal quantum number and each energy level has degeneracy $2n^2$. In the atmosphere of a star containing atomic hydrogen the average kinetic energy is 1.0 eV. Evaluate the ratio between the number of atoms in the excited levels with $n = 2$ and $n = 3$.

(5p)

Sv version.

a) Entropin för ett icke–roterande och oladdat svart hål kan visas vara $\sigma = \frac{c^3 A}{4G\hbar}$, där $A = 4\pi R_s^2$ är det svarta hålets yta, $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ är Schwarzschild radien, M är massan och G är Newtons gravitationskonstant. Energin ges av $E = mc^2$. Vad är det svarta hålets temperatur?

b) Energinivåerna för atomärt väte ges av: $E_n = -\frac{13.6}{n^2}$ eV, där $n = 1, 2, 3, 4, ...$ är huvudkvanttalet och varje nivå är $2n^2$ falt degenererat. Beräkna förhålandet mellan antalet av atomer i nivån $n = 2$ och $n = 3$ för en stjärnas atmosfär där medelvärdet av den kinetiska energin är 1.0 eV.

(5p)

2. **van der Waals gas**

   The partition function Z for a gas of N interacting particles is given by

$$Z = \left(\frac{V - bN}{N}\right)^N \left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{\frac{aN^2}{Vk_BT}}$$

   where a and b are constants and V is the volume. Derive the equation of state of the gas and also evaluate it's energy U.

(5p)

   Sv version.

   Tillståndssumman för en gas av N växelverkande partiklar ges av

$$Z = \left(\frac{V - bN}{N}\right)^N \left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{\frac{aN^2}{Vk_BT}}$$

   där a och b är konstanter och V är volymen. Härled tillståndsekvationen för gasen. Beräkna också gasens inre energi U.

(5p)

3. **Doppler effect in a gas**

   A way to determine the temperature of a star is to study the Doppler broadening of spectral lines. A classical gas, made up of atoms of mass m, is in a stars atmosphere at temperature τ. The atoms emit light that we analyse in a spectroscope. If the atoms where stationary we would observe light of frequency ν_0. Due to the Doppler broadening emitted light from an atom with velocity v_x in the x direction will not have the frequency ν_0 but a frequency ν given approximately by

$$\nu = \nu_0(1 + v_x/c)$$

   where c is the speed of light. This means that we observe a broadening of the spectral lines. Determine

   a) The average frequency $< \nu >$ of the light observed in our spectroscope.

   b) The broadening $\sqrt{< (\nu - < \nu >)^2 >}$ of the observed light.

(5p)

   Sv version.

   En metod att bestämma en stjärnas temperatur är att studera den så kallade Doppler breddningen av spektrallinjer. En klassisk gas, som består av atomer med massan m, är innesluten i en behållare vid temperatur T. Atomerna utsänder ljus, som passerar (i x-riktningen) genom ett hål i behållaren och som sedan kan observeras i ett spektroskop. En stationär atom skulle utsända ljus med med frekvensen ν_0. P.g.a. Dopplereffekten är emellertid frekvensen från en atom med hastigheten v_x i x-riktningen inte lika med ν_0 utan ges approximativt av

$$\nu = \nu_0(1 + v_x/c)$$

   där c är ljushastigheten. Detta innebär att inte allt ljus, som träffar spektroskopet, har frekvensen ν_0 utan karaktäriseras av en spridning i frekvensen.
   Beräkna

a) Medelfrekvensen $< \nu >$ hos ljuset observerat i spektroskopet.

b) Spridningen $\sqrt{< (\nu - < \nu >)^2 >}$ hos ljuset observerat i spektroskopet.

(5p)

4. **Paramagnetic system**

A paramagnetic system consists of particles of spin 1 and magnetic moment m. Each spin can point in three directions, parallel, anti–parallel and transverse to an external magnetic field. The corresponding energies are $-mB, +mB$ and 0. Determine the change of entropy for a particle as the magnetic field changes from 0 to B_0 at constant temperature. Show that for $1 << \frac{\tau}{mB_0}$ the decrease in entropy depends on the temperature τ as $\frac{A}{\tau^2}$, determine A. (5p)

Sv version.

Ett paramagnetiskt system består av partiklar med spinn 1 och magnetiskt moment m. Varje spinnkan peka i tre riktningar: parallellt, antiparallellt eller vinkelrät mot det yttre magnetiska fältet B. De motsvarande energierna är $-mB, +mB$ och 0. Bestäm entropiminskningen per molekyl då magnetfältet ändras från 0 till ett värde B_0 vid konstant temperatur. Visa att för $1 << \frac{\tau}{mB_0}$ beror entropiminskningen av T som $\frac{A}{\tau^2}$ och bestäm A. (5p)

5. **Harmonic oscillator in two dimensions**

The energy levels of a two dimensional harmonic oscillator are characterized by 2 indices $n_x = 0, 1, 2, 3...\infty$ and $n_y = 0, 1, 2, 3...\infty$. The energy is given by $\epsilon_{n_x,n_y} = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega$ The oscillator is coupled to a heat reservoir of temperature τ.

a) Evaluate an expression for the partition function $Z_{osc}(\tau)$ and the Helmholtz free energy $F_{osc}(\tau)$.

b) Evaluate the specific heat C_v of the oscillator. What is the low temperature and high temperature limit of C_v draw a figure. Hint use the entropy σ to evaluate C_v.

(5p)

Sv version.

För den tvådimensionella harmoniska oscillatorn ges energinivåerna av följande samband: $\epsilon_{n_x,n_y} = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega$ där n är ett heltal $n = 0, 1, 2, ...$ $n_x = 0, 1, 2, 3...\infty$ och $n_y = 0, 1, 2, 3...\infty$.

a) Räkna ut ett uttryck för partitionsfunktionen $Z_{osc}(\tau)$ och Helmholtz fria energi $F_{osc}(\tau)$ för en tvådimensionell harmonisk oscillator.

b) Beräkna specifica värmen C_v för oscillatorn, och ta speciellt fram gänserna $\tau \to \infty$ och $\tau \to 0$ för C_v. Rita en figur för C_v som funktion av τ. Ledning räkna ut entropin σ först.

(5p)

LYCKA TILL ! / GOOD LUCK !